解答例

# STEP III 1987、第 4 問

純粋数学 • 回転体の体積

**STEP III 1987、問 4**

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

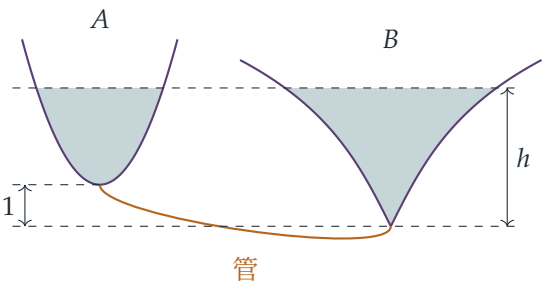
step.maths.org/questions/87-s3-q4

## 鍵となる考え方

水は一方の漏斗（funnel）からもう一方へ移るだけなので、その体積は保存される（conserved）。どちらの漏斗も $y$ 軸のまわりの回転体（solid of revolution）なので、深さ $d$ までの水の体積は $\int_0^d \pi x^2 \, \mathrm{d}y$ であり、ここで $x^2$ は $y$ で表しておく。両方の体積を深さの関数として求めてしまえば、残る注意点は二つの異なる基準の高さだけである。すなわち、$A$ と $B$ における深さは 1 単位だけ異なる。

## 解答

管の体積は無視できるものとし、問題文の二つ目の「閉じる」は「開く」と読み替える（そうでなければ水は移動できない）。$y$ は各漏斗の底から上向きに測る。



### 深さの関数としての体積

$A$ では曲線は $y = x^2$ なので、高さ $y$ における水平断面は面積 $\pi x^2 = \pi y$ の円板である。$A$ における深さ $d$ の水の体積は

$$V_A(d) = \int_0^d \pi y \, \mathrm{d}y = \frac{\pi d^2}{2}.$$

である。$B$ では、曲線 $y = 2\sinh^{-1} x$（ただし $x > 0$）を逆に解くと $x = \sinh \frac{y}{2}$ となる。$\sinh^2 \frac{y}{2} = \frac{1}{2}(\cosh y - 1)$ を用いると、$B$ における深さ $d$ の水の体積は

$$V_B(d) = \int_0^d \pi \sinh^2 \frac{y}{2} \, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} \int_0^d (\cosh y - 1) \, \mathrm{d}y = \frac{\pi}{2} (\sinh d - d).$$

である。

### 水の保存

最初、$A$ には深さ 4 の水が入っており、$B$ は空なので、全体積は

$$V_A(4) = \frac{16\pi}{2} = 8\pi.$$

である。最後には、両方の水面が $B$ の底から高さ $h$ のところにある。したがって $B$ における深さは $h$ に等しい。$A$ の底は $B$ の底より 1 単位高いので、$A$ における深さは $h - 1$ である。

**考えてみよう** そもそも、なぜ二つの水面は同じ高さに落ち着くのだろうか？

二つの漏斗と管は、静止した一続きの水を形づくっている。その圧力は高さのみに依存し、二つの自由表面はどちらも大気圧なので、両者は同じ高さにある。このことは問題文で与えられているが、二つの深さの差がちょうど底の高さの差に等しくなる理由はこれで説明される。

水は増えも減りもしないので、

$$\frac{\pi(h-1)^2}{2} + \frac{\pi}{2}(\sinh h - h) = 8\pi.$$

が成り立つ。$2/\pi$ を掛けて展開すると、

$$\begin{aligned}(h-1)^2 + \sinh h - h &= 16\\ h^2 - 2h + 1 + \sinh h - h &= 16\\ h^2 - 3h + \sinh h &= 15,\end{aligned}$$

となり、これが求める方程式である。

中段の式の左辺が意味のあるモデルとなるのは、$A$ に実際に水が入っている範囲 $h \geq 1$ に限られる。この範囲ではその導関数（derivative）$2(h-1)+\cosh h - 1$ は正なので、方程式の該当する根はちょうど一つである。数値的には $h \approx 3.33$ であり、$A$ の水は深さ 4 から約 2.33 まで下がる。

## 検算

- 二分法（bisection）により $h \approx 3.3272$ を得る。このとき $V_A(h-1)+V_B(h) \approx 25.1327$ となり、$8\pi \approx 25.1327$ と一致する。
- $\int_0^d \pi \sinh^2(y/2)\,\mathrm{d}y$ にシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用した値は、いくつかの $d$ の値について $\frac{\pi}{2}(\sinh d - d)$ と一致する（例えば $d = 1.7$ ではどちらの方法でも 1.48540 となる）。
- 妥当性：$h - 1 < 4$ なので、$A$ の水位は下がっている。水が流れ出たのだから、当然そうでなければならない。

## よくある間違い

- 両方の漏斗で深さ $h$ を用いてしまい、$A$ の底が 1 単位高いことを忘れる。この場合は代わりに $h^2 - h + \sinh h = 16$ が得られてしまう。
- $\pi x^2\,\mathrm{d}y$ ではなく $\pi y^2\,\mathrm{d}x$（$x$ 軸のまわりの回転）を積分してしまう。
- $y = 2\sinh^{-1} x$ の逆を $x = 2\sinh y$ や $x = \frac{1}{2}\sinh y$ としてしまう。正しい逆関数は $x = \sinh\frac{y}{2}$ である。

## STEP のその先へ

最後の方程式は多項式と双曲線関数（hyperbolic function）が混ざっているので、閉じた形の解（closed-form solution）をもたない。数値的に解くしかなく、上で述べた単調性の議論こそが、二分法やニュートン・ラフソン法（Newton–Raphson）のような方法で物理的に意味のある唯一の根が見つかることを保証している。大学 1 年の数値解析では、中間値の定理（intermediate value theorem）と収束の速さを用いてこのことを厳密に扱う。その背後にある解析学については、Abbott, *Understanding Analysis* を参照のこと。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。