解答例

STEP III 1987、第 3 問

純粋数学 ・ 偏角とマチンの公式

STEP III 1987、問 3

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/87-s3-q3

この問題は、*Beyond STEP* の第 5.1 節「**マチンの公式**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch05/machin.html

鍵となる考え方

どちらの小問も、複素数（complex number）の極形式（polar form）にもとづいている。(i) では、点 $(|x|, |y|)$ は原点から距離 $|z|$ の位置にあるので、$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha$ は $|z|$ にコサインを掛けたものになる。(ii) では、複素数の積をとると偏角（argument）は足し合わされる。したがって、$5 - \mathrm{i}$ や $1 + \mathrm{i}$ のような数の積がほとんど実数になることがわかれば、その偏角から逆正接（inverse tangent）の間の恒等式が得られる。本当に注意が必要なのは、偏角に 2π の不定性があることだけである。

解答

小問 (i)

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおく。$r = 0$ ならば $x = y = 0$ であり、どの項も 0 になるので、$r > 0$ と仮定する。

右側の不等式。 両辺とも非負であるから、2 乗どうしを比べれば十分である：

$$(|x| + |y|)^2 = x^2 + y^2 + 2|x||y| \geq x^2 + y^2 = |z|^2,$$

これは $|x||y| \geq 0$ による。非負の平方根をとれば $|z| \leq |x| + |y|$ が得られ、等号が成り立つのはちょうど $x = 0$ または $y = 0$ のときである。

左側の不等式。 点 $(|x|, |y|)$ は境界を含む第 1 象限にあり、原点からの距離は r である

から、ある角 $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ が存在して

$$|x| = r\cos\varphi, \qquad |y| = r\sin\varphi.$$

となる。すると加法定理（compound-angle formula）により

$$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha = r(\cos\varphi\cos\alpha + \sin\varphi\sin\alpha) = r\cos(\alpha - \varphi) \le r = |z|,$$

となる。任意の実数 α に対して $\cos(\alpha - \varphi) \le 1$ だからである。以上で両方の不等式が証明された。左側の等号は $\alpha = \varphi + 2k\pi$ のとき、すなわち $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ が $(|x|, |y|)$ と同じ向きを指すときに成り立つ。

（左側の不等式の別の示し方：コーシー・シュワルツの不等式（Cauchy–Schwarz inequality）により、$|x|\cos\alpha + |y|\sin\alpha \le \sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = |z|$ である。）

小問 (ii)：第1の公式

順に展開する：

$$\begin{aligned}(5-\mathrm{i})^2 &= 25 - 10\mathrm{i} - 1 = 24 - 10\mathrm{i},\\ (5-\mathrm{i})^4 &= (24-10\mathrm{i})^2 = 576 - 480\mathrm{i} - 100 = 476 - 480\mathrm{i},\\ (5-\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i}) &= 476 + 476\mathrm{i} - 480\mathrm{i} + 480 = 956 - 4\mathrm{i} = 4(239 - \mathrm{i}).\end{aligned}$$

次に偏角を比べる。$\theta = \tan^{-1}\frac{1}{5}$ とおく。$5-\mathrm{i}$ は第4象限にあるので偏角は $-\theta$ であり、$1+\mathrm{i}$ の偏角は $\frac{\pi}{4}$ である。同様に、$4(239-\mathrm{i})$ の偏角は $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$ である。積をとると偏角は 2π の整数倍の差を除いて足し合わされるので、

$$\frac{\pi}{4} - 4\theta = -\tan^{-1}\frac{1}{239} + 2k\pi \quad \text{ある整数} k.$$

が成り立つ。

考えてみよう $k = 0$ であることはどうしてわかるだろうか？

両辺の範囲を評価する。$0 < t < \frac{\pi}{2}$ のとき $\tan t > t$ であるから $0 < \theta < \frac{1}{5}$ であり、したがって $\frac{\pi}{4} - 4\theta$ は $\frac{\pi}{4} - \frac{4}{5} > -1$ と $\frac{\pi}{4} < 1$ の間にある。また $-\tan^{-1}\frac{1}{239}$ は -1 と 0 の間にある。$(-1, 1)$ に属する2つの数の差は $2 < 2\pi$ より小さいので、$2k\pi = 0$、すなわち $k = 0$ である。整理すると

$$\frac{\pi}{4} = 4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{239},$$

となり、示すべき式が得られた。

小問 (ii)：第 2 の公式

同じ考え方で、偏角が

$$\frac{\pi}{4} - 3\tan^{-1}\frac{1}{4} - \tan^{-1}\frac{1}{20} - \tan^{-1}\frac{1}{1985},$$

となる積、すなわち $(4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i})(1985-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})$ を考え、これが正の実数になることを期待する。因数 $1985-\mathrm{i}$ は最後に回す：

$$\begin{aligned}(4-\mathrm{i})^2 &= 16-8\mathrm{i}-1 = 15-8\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3 &= (15-8\mathrm{i})(4-\mathrm{i}) = 60-15\mathrm{i}-32\mathrm{i}-8 = 52-47\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i}) &= 1040-52\mathrm{i}-940\mathrm{i}-47 = 993-992\mathrm{i},\\ (4-\mathrm{i})^3(20-\mathrm{i})(1+\mathrm{i}) &= 993+993\mathrm{i}-992\mathrm{i}+992 = 1985+\mathrm{i}.\end{aligned}$$

したがって、ここまでの積は $1985+\mathrm{i}$ であり、最後の因数 $1985-\mathrm{i}$ はその共役複素数（conjugate）である。よって積全体は 1985^2+1 となり、正の実数である。同じことを、最後の因数を除いて偏角で比べると次のようになる：

$$\frac{\pi}{4} - 3\varphi - \psi = \tan^{-1}\frac{1}{1985} + 2k\pi, \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{1}{4},\ \psi = \tan^{-1}\frac{1}{20}.$$

ここでも $k=0$ である。$0<\varphi<\frac{1}{4}$ かつ $0<\psi<\frac{1}{20}$ であるから、左辺は $\frac{\pi}{4}-\frac{4}{5}>-1$ と $\frac{\pi}{4}<1$ の間にあり、一方で右辺から $2k\pi$ を引いたものは $(0,1)$ に属する。整理すると

$$\frac{\pi}{4} = 3\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{1}{20} + \tan^{-1}\frac{1}{1985}.$$

を得る。

検算

- 絶対値（modulus）は展開の検算に役立つ。$|5-\mathrm{i}|^8\,|1+\mathrm{i}|^2 = 26^4\cdot 2 = 913\,952$ であり、$956^2+4^2 = 913\,952$ も成り立つ。同様に $17^3\cdot 401\cdot 2 = 3\,940\,226 = 1985^2+1$ である。
- 数値的には、$4\tan^{-1}\frac{1}{5}\approx 0.789582$ であり、これから $\tan^{-1}\frac{1}{239}\approx 0.004184$ を引くと $0.785398\approx\frac{\pi}{4}$ となる。また $3\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{1}{20}\approx 0.784894$ であり、これに $\tan^{-1}\frac{1}{1985}\approx 0.000504$ を加えるとやはり $\frac{\pi}{4}$ となる。
- (i) で $z=3-4\mathrm{i}$ を試してみよう。不等式は $3\cos\alpha+4\sin\alpha\le 5\le 7$ となり、$3\cos\alpha+4\sin\alpha = 5\cos(\alpha-\varphi)$ は $\tan\alpha=\frac{4}{3}$ のとき 5 に達する。

よくある間違い

- $\arg(zw) = \arg z + \arg w$ を厳密な等式として書き、2π の整数倍を確認しないこと。最後の等式を正しいものにしているのは、逆正接の値の範囲の評価である。
- $5 - \mathrm{i}$ の代わりに $5 + \mathrm{i}$ を使うこと。このとき $(5+\mathrm{i})^4(1+\mathrm{i}) = -4 + 956\mathrm{i}$ となり、ほとんど実数ではなく、ほとんど純虚数になってしまう。符号は、積がほとんど実数になるように選ばなければならない。
- (i) で α が任意であること、したがって $\cos\alpha$ や $\sin\alpha$ が負になりうることを忘れること。コサインの形にすれば、すべての α を一度に扱える。

STEP のその先へ

第1の公式はマチン（Machin）の公式（1706年）である。小さな x に対して速く収束（converge）する級数（series）$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$ と組み合わせて、π を手計算で多くの桁まで求めるのに使われた。このような公式を見つけることは、ガウス整数（Gaussian integers）$a + b\mathrm{i}$ における因数分解の問題であり、そこでは $1+\mathrm{i}$、$5 \pm \mathrm{i}$、$4 \pm \mathrm{i}$ が素数（prime）のようにふるまう。これは代数的整数論（algebraic number theory）への最初の入口である。Davenport の *The Higher Arithmetic*（高等算術）は2つの平方数の和とガウス整数を扱っており、Needham の *Visual Complex Analysis*（ビジュアル複素解析）は複素数の掛け算の幾何学的な意味を示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。