解答例

STEP III 1987、第 2 問

純粋数学 ・ 三角関数の漸化式（積分）

> **STEP III 1987、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q2

鍵となる考え方

漸化式（reduction formula）は、「境界項（boundary term）」$\cos^m x \cos nx$ を微分し、加法定理（compound-angle identity）を用いて $\sin x \cos nx$ を $\sin(n-1)x$ を含む式に書き換えることで得られる。漸化式が得られれば、どちらの小問もこの境界項を積分の端点で評価する問題になる。0 と π では、偶奇（parity）に応じて境界項が打ち消し合うか残るかが決まる。$\frac{\pi}{2}$ では、因子 $\cos^m x$ によって境界項は消える。

（問題文に印刷された式では $-\cos^m \cos nx$ となっているが、正しくは $-\cos^m x \cos nx$ である。）

解答

漸化式

$\cos^m x \cos nx$ を積の微分法（product rule）で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos^m x \cos nx) = -m\cos^{m-1} x \sin x \cos nx - n\cos^m x \sin nx.$$

第 1 項はまだ望む形になっていない。加法定理

$$\sin(n-1)x = \sin nx \cos x - \cos nx \sin x \quad \text{より} \quad \sin x \cos nx = \cos x \sin nx - \sin(n-1)x.$$

これを代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos^m x \cos nx) &= -m\cos^m x \sin nx + m\cos^{m-1} x \sin(n-1)x - n\cos^m x \sin nx \\ &= -(m+n)\cos^m x \sin nx + m\cos^{m-1} x \sin(n-1)x.\end{aligned}$$

両辺を積分すると（$m-1$、$n-1$ が負でないために $m \geq 1$ かつ $n \geq 1$ が必要である）、

$$\cos^m x \cos nx = -(m+n)I_{m,n} + mI_{m-1,n-1},$$

すなわち

$$(m+n)I_{m,n} = -\cos^m x \cos nx + mI_{m-1,n-1},$$

となり、示すべき式が得られた（通常どおり、任意定数は不定積分の中に含めている）。

小問 (i)

$J_{m,n} = \int_0^\pi \cos^m x \sin nx \, \mathrm{d}x$ とおく。$m, n \geq 1$ のとき、この公式を 0 から π まで適用し、$\cos^m \pi \cos n\pi = (-1)^m(-1)^n$ を用いると、

$$(m+n)J_{m,n} = 1 - (-1)^{m+n} + mJ_{m-1,n-1}.$$

m と n の偶奇が一致すれば $m+n$ は偶数となり、境界項は消えて

$$J_{m,n} = \frac{m}{m+n} J_{m-1,n-1}.$$

さらに $m-1$ と $n-1$ も再び偶奇が一致するので、この操作を続けることができる。

考えてみよう この簡約の連鎖はどこで止まるか。また、そこでの値がなぜゼロになるのか？

各ステップで両方の添字が 1 ずつ減るので、$\min(m,n)$ 回のステップの後には一方の添字が 0 となり、もう一方は偶奇が同じであるから偶数である。したがって、すべての偶数 $k \geq 0$ に対して $J_{k,0} = 0$ かつ $J_{0,k} = 0$ を示せば十分である。

- $J_{k,0} = \int_0^\pi \cos^k x \sin 0 \, \mathrm{d}x = 0$ である。被積分関数が恒等的にゼロだからである。
- 偶数 $k \geq 2$ に対して、$J_{0,k} = \int_0^\pi \sin kx \, \mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{k}\cos kx\right]_0^\pi = \frac{1}{k}\left(1-(-1)^k\right) = 0$ である。

よって、$\min(m,n)$ に関する数学的帰納法（induction）により、m, n がともに偶数またはともに奇数のとき $J_{m,n} = 0$ である。

別解： $x = \pi - t$ と置換すると、$\cos^m x$ は $(-1)^m \cos^m t$ に、$\sin nx$ は $-(-1)^n \sin nt$ に移るので、$J_{m,n} = (-1)^{m+n+1} J_{m,n}$ となる。したがって $m+n$ が偶数のとき $J_{m,n} = 0$ でなければならない。被積分関数は $x = \frac{\pi}{2}$ に関して反対称（antisymmetric）なのである。

小問 (ii)

余弦を導入するために $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ と書くと、

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \sin 3x \, \mathrm{d}x = K_{0,3} - K_{2,3}, \qquad K_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin nx \, \mathrm{d}x.$$

$\cos\frac{\pi}{2}=0$ であるから、$m\geq 1$ のとき境界項は $-\left[\cos^m x\cos nx\right]_0^{\pi/2}=0-(-1)=1$ となる。よって

$$(m+n)K_{m,n}=1+mK_{m-1,n-1}\qquad (m,n\geq 1).$$

$K_{0,1}=\int_0^{\pi/2}\sin x\,\mathrm{d}x=1$ から始めると、

$$3K_{1,2}=1+K_{0,1}=2,\qquad K_{1,2}=\tfrac{2}{3},$$
$$5K_{2,3}=1+2K_{1,2}=\tfrac{7}{3},\qquad K_{2,3}=\tfrac{7}{15}.$$

また、$\cos\frac{3\pi}{2}=0$ より $K_{0,3}=\left[-\frac{1}{3}\cos 3x\right]_0^{\pi/2}=\frac{1}{3}$ である。したがって

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\sin 3x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}-\frac{7}{15}=-\frac{2}{15}.$$

検算

小問 (ii) は積和の公式（product-to-sum formulae）を用いて直接計算することもできる。$\sin^2 x\sin 3x=\frac{1}{2}\sin 3x-\frac{1}{4}(\sin 5x+\sin x)$ であり、これを $[0,\frac{\pi}{2}]$ で積分すると $\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}+1\right)=-\frac{2}{15}$ となる。負の符号はもっともらしい。$\sin 3x<0$ となるのは $(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$ であり、これはちょうど $\sin^2 x$ が最も大きくなる区間だからである。シンプソンの公式（Simpson's rule）による数値計算では -0.133333 が得られ、さらに多くの m,n について漸化式と小問 (i) を数値的に確かめることができる。

よくある間違い

- (ii) で $x=\frac{\pi}{2}-t$ と置換しようとすること。$\sin^2 x$ は $\cos^2 t$ になるが、$\sin 3x$ は $-\cos 3t$ になるので、積分は $I_{m,n}$ の形にならない。
- 漸化式が $m,n\geq 1$ のときにしか使えないことを忘れること。そのため、(i) の連鎖には、添字の一方が 0 に等しい場合の初期段階を別に用意する必要がある。

STEP のその先へ

このような漸化式は、より大きな物語の始まりにすぎない。三角関数の積を 1 周期にわたって積分したものは、フーリエ級数（Fourier series）の背後にある直交関係（orthogonality relations）であり、そこでは (i) のような対称性の議論によって、どの係数が消えるかが一目でわかる。Boyce and DiPrima, *Elementary Differential Equations*（初等微分方程式）には、フーリエ級数とその微分方程式の解法への応用について、読みやすい入門が収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。