解答例

STEP III 1987、第 16 問

確率・統計 ・ 順序統計量とポアソン分布

> **STEP III 1987、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q16

鍵となる考え方

小問 (i) では、事象「$A \le k$ かつ $B \ge 1-k$」を直接扱うのは面倒であるが、その余事象（complement）は二つの単純な事象「すべての X_i が k より大きい」と「すべての X_i が $1-k$ より小さい」の和事象（union）である。あとは包除原理（inclusion–exclusion）が仕事をしてくれる。小問 (ii) では、当選者の数は n が非常に大きく p が非常に小さい二項分布（binomial distribution）に従う。これはまさにポアソン分布（Poisson distribution）の出番である。そこで、当選者が 1 人または 2 人であるポアソン確率を最大化し、そのうえで近似によって答えが 60% を超えてしまうことがないことを確かめる。

解答

小問 (i)

E を事象 $A > k$、F を事象 $B < 1-k$ とする。$A > k$ はすべての X_i が k より大きいことを意味し、$B < 1-k$ はすべての X_i が $1-k$ より小さいことを意味する。独立性（independence）より

$$\mathrm{P}(E) = (1-k)^n, \qquad \mathrm{P}(F) = (1-k)^n, \qquad \mathrm{P}(E \cap F) = (1-2k)^n,$$

である。最後の式が成り立つのは、$E \cap F$ がすべての X_i が長さ $1-2k > 0$ の区間 $(k, 1-k)$ に入ることを表すからである。

求める事象は $E \cup F$ の余事象であるから、包除原理により

$$p_n = 1 - \mathrm{P}(E \cup F) = 1 - 2(1-k)^n + (1-2k)^n.$$

$0 < 1-2k < 1-k < 1$ であるから、どちらの累乗も 0 に収束し、したがって

$$p_n \to 1 \quad (\text{極限}) \; n \to \infty.$$

が成り立つ。

コメント。 k をどれほど小さくとっても、観測値が十分多ければ、ある観測値が 0 から k 以内にあり、別の観測値が 1 から k 以内にあることはほぼ確実になる。言い換えれば、標本の最小値は 0 に、最大値は 1 に（確率収束の意味で）収束し、したがって標本の範囲 $B-A$ は区間全体の長さ 1 に近づく。たとえば、未知の一様分布（uniform distribution）の端点の推定量（estimator）として A と B が自然なのはこのためである。

小問 (ii)

$N = 4\,000\,000$ とし、X を当選者の数とする。読者はそれぞれ確率 p で独立に当選するから、$X \sim \mathrm{B}(N,p)$ である。$q = 1-p$ とおく。あなたが職を失わずにすむのはちょうど $X=1$ または $X=2$ のときであり、その確率は

$$K(p) = Npq^{N-1} + \binom{N}{2} p^2 q^{N-2}.$$

である。

ポアソン分布による見方。 N が非常に大きく p が小さいとき、X は近似的に平均 $\lambda = Np$ のポアソン分布に従うから

$$K(p) \approx h(\lambda), \qquad \text{ただし} h(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right).$$

となる。微分すると

$$h'(\lambda) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 + \lambda - \lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right),$$

であり、これは $0 < \lambda < \sqrt{2}$ で正、$\lambda > \sqrt{2}$ で負である。よって h は $\lambda = \sqrt{2}$ で最大値をとる：

$$h(\sqrt{2}) = \mathrm{e}^{-\sqrt{2}}(\sqrt{2}+1) \approx 0.2431 \times 2.4142 \approx 0.5869.$$

最善の選択は $p = \sqrt{2}/N \approx 3.5 \times 10^{-7}$ であり、それでも職を守れる確率は約 58.7% にすぎない。これが問題の求めている推論である。

> **考えてみよう** ポアソン分布は近似にすぎない。真の二項確率が 0.6 をわずかに上回ることはありえないだろうか。

ありえない。$K(p)$ を直接評価することができる。$q \le 1$ かつ $\binom{N}{2} \le \frac{1}{2}N^2$ であるから

$$K(p) = q^{N-2}\left(Npq + \binom{N}{2}p^2\right) \le q^{N-2}\left(\lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right).$$

ここで、すべての p に対して $1-p \le \mathrm{e}^{-p}$ が成り立つ（直線 $1-p$ は凸（convex）な曲線 e^{-p} の $p=0$ における接線である）から、$\mu=(N-2)p$ とおくと $q^{N-2} \le \mathrm{e}^{-(N-2)p} = \mathrm{e}^{-\mu}$ である。$c = N/(N-2)$ とおくと、$c>1$ として $\lambda = c\mu$ となる。すると

$$K(p) \le \mathrm{e}^{-\mu}\left(c\mu + \frac{c^2\mu^2}{2}\right) \le c^2\,\mathrm{e}^{-\mu}\left(\mu + \frac{\mu^2}{2}\right) = c^2 h(\mu) \le c^2 h(\sqrt{2}).$$

ここで $c^2 = (1-\frac{2}{N})^{-2} < 1.000002$ であるから、どのように p を選んでも

$$K(p) < 1.000002 \times 0.58694 < 0.587 < 0.6.$$

が成り立つ。したがって、p をどう選んでも、職を守れる確率は 60% 未満であり、これが示すべきことであった。

検算

- 小問 (i) で $n=1$ とすると $p_1 = 1-2(1-k)+(1-2k) = 0$ となる。これは正しい。$k<\frac{1}{2}$ のとき、ただ一つの観測値が $\le k$ かつ $\ge 1-k$ となることはありえない。$n=2$ のときは $p_2 = 2k^2$ となり、これは 2 点のうち一方がそれぞれの端の帯に入る確率（順序は問わない）である。
- $n=10$、$k=0.3$ でのシミュレーションでは 0.944 となり、公式の値 0.9436 と一致した。
- $\lambda = Np$ の細かい格子上で厳密な二項確率 $K(p)$ を計算すると、$\lambda \approx 1.414$ で最大値 0.58694 をとり、ポアソンによる値と小数第 5 位まで一致する。

よくある間違い

- $p_n = \mathrm{P}(A \le k)\,\mathrm{P}(B \ge 1-k)$ と書いてしまう。同じ標本の最小値と最大値は独立ではない。
- 二項確率を p について直接最大化しようとする。不可能ではないが計算が煩雑である。$\lambda = Np$ を用いれば、1 行で済む微分の問題になる。
- ポアソン近似で止めてしまい、0.587 が 0.6 に十分近く、何らかの正当化をする価値があることに気づかない。

STEP のその先へ

小問 (i) は**順序統計量**（order statistics）と確率収束（convergence in probability）への最初の入口である。標本の最小値と最大値は台（support）の両端に収束する。小問

(ii) はポアソンの「稀な事象の法則」（law of rare events）であり、ここで用いた評価は、p が小さいとき二項分布とポアソン分布が全変動距離（total variation）の意味で非常に近いという一般的な事実の簡単な例である。どちらの考え方も、Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）や、Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）で展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。