解答例

STEP III 1987、第 15 問

確率・統計 ・ 期待費用の最適化

> **STEP III 1987、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q15

鍵となる考え方

E_n を直接最小化するのではなく、検査を 1 回追加すると何が変わるかを考える。「n 回で打ち切る」戦略と「$n+1$ 回で打ち切る」戦略の違いは、それまでに n 回陽性が出ている患者についてしか生じない。そのような患者に対して、追加の検査には £10 かかるが、ステップ症候群の患者の検査結果が陰性であれば £100 の治療費が節約される。したがって $E_{n+1} - E_n$ の符号がすべてを決め、その符号が変わるのは高々 1 回である。

解答

患者がフェンランド熱にかかっているという事象を F とし、$\mathrm{P}(F) = p$ とする。また $S = F'$ をステップ症候群とする。ステップ症候群の患者の検査結果は互いに独立（independent）であり、各回の検査が陽性となる確率は q（ただし $0 < q < 1$）であると仮定する。治療費は誰が受けても £100 である。

小問 (i)

E_n を求める。患者が F であれば、検査は毎回陽性となる。したがって n 回の検査がすべて行われ、そのあと治療が行われるので、費用は $10n + 100$ である。

患者が S であれば、k 回目の検査（$1 \le k \le n$）が行われるのは最初の $k-1$ 回がすべて陽性だったときに限られ、その確率は q^{k-1} である。よって検査回数の期待値は

$$\sum_{k=1}^{n} q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q},$$

であり、患者が治療を受けるのは n 回の検査がすべて陽性のときに限られ、その確率

は q^n である。期待値の線形性（linearity of expectation）により、

$$E_n = p\,(10n + 100) + (1 - p)\left(\frac{10(1 - q^n)}{1 - q} + 100q^n\right).$$

これから $E_0 = 100$ も得られる。このときは全員が治療を受けるので、当然そうなるべきである。

差。 F の部分は 10 増える。S の部分では $\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = q^n$ であるから、

$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= 10p + (1 - p)(10q^n + 100q^{n+1} - 100q^n) \\ &= 10p + 10(1 - p)q^n(1 + 10q - 10) \\ &= 10p - 10(1 - p)q^n(9 - 10q), \end{aligned}$$

となり、求める式が得られた。

この結果の読み方：確率 p で、$n + 1$ 回目の検査はフェンランド熱の患者に対して無駄に行われる。確率 $(1 - p)q^n$ で、その検査はステップ症候群の患者に行われて £10 かかるが、確率 $1 - q$ で £100 が節約される。正味の節約額の期待値は $100(1 - q) - 10 = 10(9 - 10q)$ である。

数値。 $D_n = E_{n+1} - E_n$ とおく。$p = 10^{-4}$、$q = 10^{-2}$ のとき $9 - 10q = 8.9$、$1 - p = 0.9999$ であるから、

$$D_n = 10^{-3} - 89 \times 0.9999 \times 10^{-2n}.$$

? 考えてみよう D_n の符号が変わる位置を求めれば十分なのはなぜか？

ここで $9 - 10q > 0$ であり、q^n は n が大きくなるにつれて狭義単調減少するので、D_n は n について狭義単調増加する。したがって数列 E_n は $D_n < 0$ である間は減少し、$D_n > 0$ となってからは増加するので、最小となるのは $D_n > 0$ となる最初の n においてである。ここで

$$\begin{aligned} D_2 &= 10^{-3} - 0.0088991 < 0, \\ D_3 &= 10^{-3} - 0.000088991 = 0.000911\ldots > 0. \end{aligned}$$

よって $E_0 > E_1 > E_2 > E_3$ かつ $E_3 < E_4 < E_5 < \cdots$ であり、医師は $n = 3$ を選ぶべきである。（このとき費用の期待値は約 £10.11 であり、すぐに治療する場合の £100 と比べてはるかに小さい。）

小問 (ii)

$q_0 = \frac{9}{10}$ とし、$q > \frac{9}{10}$ と仮定する。このとき $9 - 10q < 0$ であるから、

$$D_n = 10p + 10(1 - p)q^n(10q - 9).$$

どちらの項も、すべての $p \in [0,1]$ に対して非負である。また両方が同時に 0 になることはない。実際、$p > 0$ ならば第 1 項が正であり、$p = 0$ ならば第 2 項は $10q^n(10q - 9) > 0$ である。よってすべての $n \geq 0$ に対して $D_n > 0$ であり、

$$E_0 < E_1 < E_2 < \cdots .$$

が成り立つ。p の値によらず、医師は $n = 0$ を選び、すぐに治療すべきである。

この q_0 の値はこれ以上小さくできない。$q < \frac{9}{10}$ ならば、$D_0 = 10p - 10(1-p)(9-10q)$ は p が十分小さいとき負になるので、少なくとも 1 回検査するほうが $n = 0$ よりよい。言葉で言えば、$q > \frac{9}{10}$ のとき、ステップ症候群の患者の検査が陰性になるのは 10 回に 1 回未満であるから、£10 の検査によって節約される治療費は平均して £10 に満たない。しかもこれは、フェンランド熱の患者の分を数える前の話である。

検算

- $n = 1$ を直接計算する：$E_1 = 10 + 100\big(p + (1-p)q\big)$。$p = 0$ とすると $E_1 - E_0 = 10 - 100(1-q)$ となり、公式の $-10q^0(9 - 10q)$ と一致する。
- $p = 10^{-4}$、$q = 10^{-2}$ のとき、公式から $E_0 = 100$、$E_1 \approx 11.010$、$E_2 \approx 10.1210$、$E_3 \approx 10.11309$、$E_4 \approx 10.11400$ が得られる。最小は $n = 3$ であり、求めた結果と一致する。
- 分数を用いた厳密な数え上げにより、数百組の無作為な (p, q) と $n \leq 8$ について E_n の公式と差の恒等式を確認した。また $p = 0.3$、$q = 0.5$、$n = 2$ のシミュレーションでは平均費用が 63.98 となり、厳密値 64 とよく一致した。

よくある間違い

- ステップ症候群の患者に n 回分すべての検査費用を課してしまう。手続きは最初に陰性が出た時点で終わるので、k 回目の検査が行われる確率は q^{k-1} にすぎない。
- D_n が単調（monotonic）である理由を述べずに、$D_n > 0$ となる最初の n を求めてしまう。それを示さなければ、数列 E_n が後で再び減少する可能性を原理的には否定できない。
- 小問 (ii) で $p = 0$ の場合を忘れる。この場合があるからこそ、条件は $q \geq q_0$ ではなく $q > q_0$ となる。$q = \frac{9}{10}$ かつ $p = 0$ のとき、すべての E_n が 100 に等しくなる。

STEP のその先へ

これは**最適停止**（optimal stopping）と決定理論（decision theory）の小さな例である。費用を伴う一連の行動、確率的な状態、そしていつ止めるかの規則がある。隣り合う戦略を比較し（「限界分析」（marginal analysis））、その差の符号が 1 回しか変わらないことを示すのが、このような問題を扱う標準的な方法である。これらの考え方は、ベイズ決定理論（Bayesian decision theory）や動的計画法（dynamic programming）へとつながっていく。Grimmett と Welsh の *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、それらを支える条件付き期待値（conditional expectation）の道具を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。