解答例

STEP III 1987、第 14 問

力学 ・ 重力崩壊

> **STEP III 1987、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q14

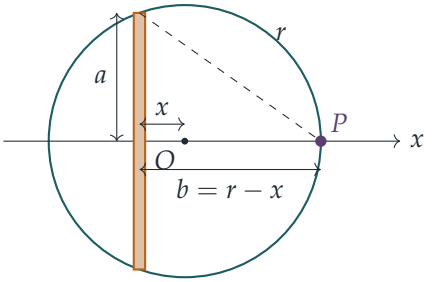
鍵となる考え方

中身の詰まった球は薄い円板を積み重ねたものとみなせるので、球全体から受ける力は、与えられた円板の公式を質点を通る軸に沿って積分（integral）したものになる。平方根は扱いにくそうに見えるが、質点が球の表面にある場合には根号の中の式が因数分解できることに気づけば道が開ける。その後の雲の問題は、連鎖律（chain rule）$\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dr}$ を用いたニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）であり、置換（substitution）$r = R\cos^2\alpha$ は、2 回目の積分で現れる平方根をすっきりさせるために用意されたものである。

解答

球の表面における力

球の中心を原点に、質点 P を x 軸上の $x = r$ に置く。球を軸に垂直な円板に切り分ける。位置 x（ただし $-r \le x \le r$）にある切片は厚さ δx、半径 a（$a^2 = r^2 - x^2$）をもち、P からその軸上で距離 $b = r - x \ge 0$ のところにある。



鍵となる簡略化は平方根の中にある。

$$a^2 + b^2 = (r^2 - x^2) + (r - x)^2 = 2r^2 - 2rx = 2r(r - x),$$

したがって

$$\frac{b}{(a^2 + b^2)^{1/2}} = \frac{r - x}{\sqrt{2r(r - x)}} = \sqrt{\frac{r - x}{2r}}.$$

各円板は P を軸に沿って中心の方へ引くので、力はすべて同じ向きにはたらき、単純に足し合わせればよい。$\delta x \to 0$ とすると、力の合計は

$$\begin{aligned} F &= 2\pi mk\rho \int_{-r}^{r} \left(1 - \sqrt{\frac{r - x}{2r}}\right) \mathrm{d}x \\ &= 2\pi mk\rho \left(2r - \frac{1}{\sqrt{2r}} \int_0^{2r} u^{1/2} \, \mathrm{d}u\right) \qquad (u = r - x) \\ &= 2\pi mk\rho \left(2r - \frac{1}{\sqrt{2r}} \cdot \tfrac{2}{3}(2r)^{3/2}\right) = 2\pi mk\rho \left(2r - \tfrac{4}{3}r\right) = \tfrac{4}{3}\pi mk\rho \, r. \end{aligned}$$

球の質量は $M = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$ であるから $\frac{4}{3}\pi\rho = M/r^3$ であり、

$$F = \frac{kmM}{r^2},$$

となる。向きは中心向きであり、これで示された。

雲の運動方程式

雲の粒子を質量 M の連続で一様な球とみなし、その表面上で中心から距離 r にある質量 m の粒子を考える。上の結果より、この粒子にはたらく力は中心向きの kmM/r^2 だけである。r を座標（外向きを正）にとると、ニュートンの運動の第 2 法則より

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{kmM}{r^2}.$$

ここで $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -v$ であるから $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ であり、連鎖律より

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}.$$

よって $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$ であり、m を約して

$$v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{kM}{r^2}.$$

考えてみよう 円板の結果は静止した球についてのものであった。収縮していく雲にそれを使ってよいのはなぜか。

各瞬間の力はその瞬間に質量がどこにあるかだけで決まるので、雲が一様な球のままであり、表面の内側に同じ質量 M があり続けることが必要である。実際そうなっている。半径 λR（$0 < \lambda \leq 1$）で静止状態から出発する粒子の内側には質量 $\lambda^3 M$ があり、$r(t)$ が $\ddot{r} = -kM/r^2$ を満たすならば $\lambda r(t)$ は $\ddot{s} = -k\lambda^3 M/s^2$ を満たす。したがって、どの粒子も表面の半径に対して同じ比率の位置にとどまる。つまり雲は一様な倍率で縮み、一様なままであり、どの粒子も表面の粒子を追い越さない。（粒子の外側の質量が問題になるのは内部の粒子についてだけであり、表面の外側には質量は存在しない。）

静止状態からの収縮

変数分離（separation of variables）を行い、$v = 0$ となる $r = R$ から積分する。

$$\tfrac{1}{2}v^2 = \int_R^r -\frac{kM}{s^2}\,\mathrm{d}s = kM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{kM(R-r)}{rR}.$$

加速度はつねに内向きであり、雲は静止状態から出発するので、r は減少し、つねに $v \geq 0$ である。

ここで $r = R\cos^2\alpha$ と置換する。r が R から 0 に向かって減少するにつれて、α は $t = 0$ での 0 から $\frac{\pi}{2}$ に向かって増加するものとする。すると $R - r = R\sin^2\alpha$ であるから

$$v^2 = \frac{2kM\,R\sin^2\alpha}{R^2\cos^2\alpha} = \frac{2kM}{R}\tan^2\alpha, \qquad v = \left(\frac{2kM}{R}\right)^{1/2}\tan\alpha,$$

となる。ここで、$v \geq 0$ であり、$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$ で $\tan\alpha \geq 0$ であるから正の平方根をとった。

> **考えてみよう** α の関数としての v から、α の関数としての t をどうやって得るか。

$v = -\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ と $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = -2R\cos\alpha\sin\alpha$ を用いる。

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\alpha} = -\frac{1}{v}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2R\sin\alpha\cos\alpha}{(2kM/R)^{1/2}\tan\alpha} = \left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2} 2\cos^2\alpha = \left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2}(1+\cos 2\alpha).$$

$\alpha = 0$ のとき $t = 0$ として積分すると

$$t = \left(\frac{R^3}{2kM}\right)^{1/2}\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right),$$

となり、これが $r = R\cos^2\alpha$ となる時刻である。これで示された。

検算

- 短い時間：α が小さいとき $t \approx 2\alpha(R^3/2kM)^{1/2}$、$R - r \approx R\alpha^2$ であるから $R - r \approx \frac{1}{2}(kM/R^2)\,t^2$ となる。これは静止状態からの一定の加速度 kM/R^2 による運動であ

り、出発直後に予想されるとおりである。

- $\alpha \to \frac{\pi}{2}$ とすると、収縮に要する全時間 $\frac{\pi}{2}(R^3/2kM)^{1/2}$ が得られる。$v \to \infty$ となるにもかかわらず、この値は有限である。
- 数値的には、200 000 枚の薄い円板を足し合わせると、相対誤差約 2×10^{-9} で kmM/r^2 が再現される。$k = 1.7$、$M = 2.3$、$R = 1.9$ として $\ddot{r} = -kM/r^2$ を $\alpha = 0.8$ に対応する時刻まで数値的に進めると $r = 0.922260$ となり、$R\cos^2 0.8 = 0.922260$ と一致する。

よくある間違い

- b を質点からではなく球の中心から測ってしまう。正しくは $b = r - x$ であり、x ではない。
- v が**内向き**の速さであることを忘れる。このため $\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$ の符号が反転する。
- v として負の平方根をとってしまう。すると時間が負になってしまう。

STEP のその先へ

前半は、ニュートンの殻定理（shell theorem）の特別な場合である。殻定理とは、球対称な物体の外側では、重力はすべての質量が中心に集まっているかのようにはたらく、というものである。大学の講義では、重力に関するガウス（Gauss）の法則（Gauss's law）$\nabla \cdot \mathbf{g} = -4\pi G\rho$ を用いてこれを鮮やかに証明する。ここで求めた収縮時間は天体物理学でいう**自由落下時間**（free-fall time）であり、ガス雲がどれほど速く収縮して恒星を形成するかを見積もるのに使われる。また、α による媒介変数表示（parametrisation）は、動径方向のケプラー軌道（Kepler orbits）を記述するものと同じである。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、このような考え方で中心力と殻定理を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。