解答例

STEP III 1987、第 13 問

力学 ・ 摩擦のある回転棒

> **STEP III 1987、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q13

鍵となる考え方

質点が棒にくっついている間は、棒と質点は一体の剛体（rigid body）としてヒンジ（hinge）のまわりを回転する。したがって、合成した慣性モーメント（moment of inertia）を用いてエネルギー保存則（conservation of energy）を適用すれば、ただちに $\dot{\theta}^2$ が得られる。すべり始める時刻を求めるには、次に質点だけに注目する。質点はヒンジのまわりに円運動するので、動径方向（radial）と接線方向（transverse）にニュートン（Newton）の運動の第 2 法則を適用すれば、棒が及ぼすべき摩擦力（friction）と垂直抗力（normal reaction）の大きさが正確にわかる。必要な摩擦力が垂直抗力の $\frac{1}{2}$ に達したとき、すべりが始まる。

解答

運動方程式

棒をなめらかなヒンジ O のまわりに回転する一様な剛体棒とし、質点を O から距離 a の位置にある点質量としてモデル化する。質点がすべり出すまでは、質点は O から距離 a の位置にとどまり、棒とともに回転する。

O のまわりの系の慣性モーメントは

$$I = \tfrac{4}{3}(3m)a^2 + ma^2 = 4ma^2 + ma^2 = 5ma^2,$$

である。ここで、長さ $2l$ の一様な棒の一端のまわりの慣性モーメント $\frac{4}{3}Ml^2$ を用いた。

ヒンジはなめらかであり、質点と棒の間の摩擦力と垂直抗力は系の内力であるから、正味の仕事をしない。棒が θ だけ回転したとき、棒の中心と質点（いずれも O から距

離 a）はそれぞれ $a\sin\theta$ だけ下降している。静止状態から動き始めるので、エネルギー保存則より

$$\tfrac{1}{2}(5ma^2)\dot{\theta}^2 = 3mg\,a\sin\theta + mg\,a\sin\theta = 4mga\sin\theta,$$

すなわち

$$5a\dot{\theta}^2 = 8g\sin\theta,$$

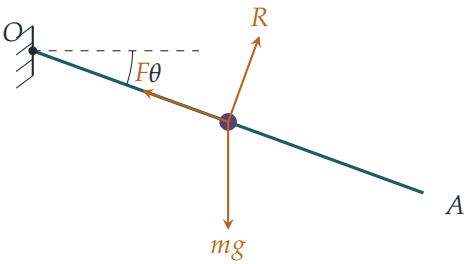
となり、求める式が得られた。これを t で微分すると $10a\dot{\theta}\ddot{\theta} = 8g\cos\theta\,\dot{\theta}$ となるので（運動が始まれば $\dot{\theta} \neq 0$ が成り立つことに注意して）

$$a\ddot{\theta} = \tfrac{4}{5}g\cos\theta.$$

を得る。（O のまわりのモーメントを考えても同じ結果 $5ma^2\ddot{\theta} = 4mga\cos\theta$ が得られる。）

質点がすべり出すとき

次に、質点だけを考える。質点にはたらく力は、重力 mg、棒に垂直な垂直抗力 R、棒に沿った摩擦力 F である。質点は O を中心とする半径 a の円周上を動くので、その加速度は、棒に沿って O に**向かう**成分 $a\dot{\theta}^2$ と、棒に垂直で θ が増加する向きの成分 $a\ddot{\theta}$ をもつ。



F は棒に沿って O に向かう向きにはたらくものとする。これは、後で確かめるように、質点が実際に必要とする向きである。棒に沿った方向で O に向かう向きを正として力を分解する。重力は O から**遠ざかる**向きに成分 $mg\sin\theta$ をもつので

$$F - mg\sin\theta = ma\dot{\theta}^2 = \tfrac{8}{5}mg\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad F = \tfrac{13}{5}mg\sin\theta.$$

棒に垂直な方向で、θ が増加する向き（棒から下向き）を正として分解する。重力の成分は $mg\cos\theta$ であるから

$$mg\cos\theta - R = ma\ddot{\theta} = \tfrac{4}{5}mg\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad R = \tfrac{1}{5}mg\cos\theta.$$

考えてみよう 重力は質点を斜面の下方へ引くように見えるのに、なぜ質点にはヒンジに向かう摩擦力が必要なのだろうか。

はたらいているのは重力だけではない。O のまわりの円運動を続けるためには、質点には O に向かう正味の力 $ma\dot{\theta}^2$ が必要である。重力の棒方向の成分はその逆、すなわち O から遠ざかる向きであるから、摩擦力は向心力（centripetal force）と、重力のその成分を打ち消す力の両方を担わなければならない。そのため F は O に向かう向きに正となり、$\sin\theta$ に比例して増加する。一方、R が小さいのは、棒が質点の下で「落ちていく」からである（$\theta = 0$ では質点は下向きに $\frac{4}{5}g$ の加速度をもつので、棒は質点の重さの $\frac{1}{5}$ しか支えていない）。

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ では F と R はともに正であるから、質点は棒から離れない。質点が棒に対して静止し続けるのは $F \leq \frac{1}{2}R$ である間、すなわち

$$\tfrac{13}{5}mg\sin\theta \leq \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{5}mg\cos\theta \iff \tan\theta \leq \tfrac{1}{26}.$$

である間である。$\theta = 0$ では $F = 0 < \frac{1}{2}R$ であり、$F/R = 13\tan\theta$ は θ について増加するので、質点が初めて（ヒンジから遠ざかる外向きに）すべり始めるのは

$$\tan\theta = \tfrac{1}{26},$$

のときであり、求める結果が得られた。

検算

- $\theta = 0$ ではモーメントの式から角加速度は $\frac{4g}{5a}$ となる。よって質点の加速度は $\frac{4}{5}g$ で g より小さく、$R = \frac{1}{5}mg > 0$ と矛盾しない。
- 剛体としての運動を（$g = 9.81$、$a = 0.7$ として）数値的に時間発展させると、$5a\dot{\theta}^2 = 8g\sin\theta$ が 10^{-12} の精度で再現された。また、計算した質点の加速度から直接求めた摩擦力と抗力は $\frac{13}{5}mg\sin\theta$ および $\frac{1}{5}mg\cos\theta$ と一致した。比 F/R が初めて $\frac{1}{2}$ に達したのは $\theta \approx 0.03845$ rad のときであり、これは $\arctan\frac{1}{26} \approx 2.20°$ である。

よくある間違い

- 向心加速度の項を忘れ、質点が斜面上でつり合っているかのように力を分解してしまう。こうすると角度が誤るだけでなく、摩擦力の向きも逆になる。
- $\frac{1}{3}(3m)(2a)^2$ は正しく使ったのに、慣性モーメントに質点の分 ma^2 を加え忘れる。
- 固定された斜面の場合と同様に $R = mg\cos\theta$ としてしまう。棒は加速しているので、抗力はそれよりずっと小さい。

STEP のその先へ

この問題は、回転座標系（rotating frame）で考えることへの最初の入り口である。棒から見ると、質点には外向きの「遠心力」$ma\dot{\theta}^2$ と「オイラー（Euler）力」$-ma\ddot{\theta}$ がはたらいているように見え、これらの見かけの力（fictitious forces）こそ、ここで求めた項にほかならない。大学の力学ではこれを体系的に展開し、質点がすべり始めた後に現れるコリオリ力（Coriolis force）もあわせて扱う。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、剛体の回転と非慣性系（non-inertial frame）を非常に明快に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。