解答例

STEP III 1987、第 12 問

力学 ・ 質量が変化する物体の回転

> **STEP III 1987、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q12

鍵となる考え方

これは可変質量（variable mass）の問題であるから、$F = ma$（あるいはその回転版）をそのまま使うことはできない。確実な方法は基本原理に立ち返ることである。すなわち、時刻 t における支点（pivot）のまわりの角運動量（angular momentum）と、燃焼した燃料がわずかに系から出ていった時刻 $t + \delta t$ における角運動量とを比較する。支点はなめらかで重力は鉛直方向であるから、支点を通る鉛直軸のまわりにモーメント（moment）を及ぼすものは何もなく、その角運動量は保存される。

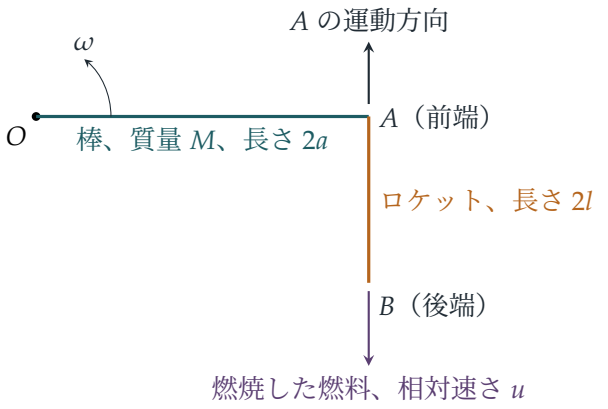
解答

設定

棒とロケットを一様な剛体の棒とみなし、支点 O を通る鉛直軸のまわりに水平面内で回転するとする。棒を OA とし、$OA = 2a$ とする。OA に沿った単位ベクトルを $\mathbf{e}_r$、それに垂直で回転の向きを向く単位ベクトルを $\mathbf{e}_\theta$ とし、鉛直上向きの単位ベクトルを $\mathbf{k}$ とする。よって $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta = \mathbf{k}$ である。

ロケットの前端は A にあり、前方、すなわち A の運動方向を向いている。したがってロケットは $\mathbf{e}_\theta$ に沿って置かれ、A から**後方へ**後端 B まで伸びている。ここで

$$\overrightarrow{OB} = 2a\,\mathbf{e}_r - 2l\,\mathbf{e}_\theta.$$



慣性モーメント

端のまわりの棒の慣性モーメント（moment of inertia）は $\frac{1}{3}M(2a)^2 = \frac{4}{3}Ma^2$ である。

ロケットの中心は $2a\,\mathbf{e}_r - l\,\mathbf{e}_\theta$ にあり、O からの距離は $\sqrt{4a^2 + l^2}$ である。中心のまわりのロケットの慣性モーメントは $\frac{1}{3}ml^2$ であるから、平行軸の定理（parallel axis theorem）により、ロケットの寄与は $\frac{1}{3}ml^2 + m(4a^2 + l^2)$ となる。合計は

$$I = \tfrac{4}{3}Ma^2 + m\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right).$$

I の変化

$m = 2\alpha l$ かつ $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\alpha\beta$ であるから、$\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{2}\beta$ である。積の微分法則（product rule）を用いて I を微分すると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right) + m \cdot \tfrac{8}{3}l\,\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t} \\ &= -\alpha\beta\left(4a^2 + \tfrac{4}{3}l^2\right) + 2\alpha l \cdot \tfrac{8}{3}l \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\beta\right) = -\alpha\beta\,(4a^2 + 4l^2).\end{aligned}$$

$4a^2 + 4l^2 = OB^2$ であることに注意しよう。慣性モーメントは、後端 B から質量を取り除いた場合とちょうど同じ割合で減少する。これは理にかなっている。前端を A に固定したまま一様であり続ける一様なロケットは、後ろから縮むしかないからである。

放出された燃料の角運動量

t から $t + \delta t$ までの短い時間に、質量 $\delta\mu = \alpha\beta\,\delta t$ の燃焼した燃料が B から出ていく。燃焼する前、この燃料はロケットとともに速度 $\mathbf{v}_B = \omega\mathbf{k} \times \overrightarrow{OB}$ で運動していた。燃焼後は、ロケットに対して真後ろに運動するので、その速度は $\mathbf{v}_B - u\,\mathbf{e}_\theta$ である。このとき

O のまわりの角運動量は

$$\begin{aligned}\delta\mu\,\overrightarrow{OB}\times(\mathbf{v}_B-u\,\mathbf{e}_\theta)&=\delta\mu\left[\omega\,OB^2\,\mathbf{k}-(2a\,\mathbf{e}_r-2l\,\mathbf{e}_\theta)\times u\,\mathbf{e}_\theta\right]\\&=\delta\mu\left[\omega(4a^2+4l^2)-2au\right]\mathbf{k},\end{aligned}$$

となる。ここで $\mathbf{e}_\theta\times\mathbf{e}_\theta=\mathbf{0}$ と、$\mathbf{k}$ に垂直な $\mathbf{r}$ に対する $\mathbf{r}\times(\omega\mathbf{k}\times\mathbf{r})=\omega r^2\mathbf{k}$ を用いた。

考えてみよう 排気の項に対して、$\overrightarrow{OB}$ のうち $2a\,\mathbf{e}_r$ の部分だけが効くのはなぜか。

排気の相対速度は $\mathbf{e}_\theta$ に沿っており、ロケットと同じ直線上にある。したがって、$\overrightarrow{OB}$ のロケットに沿った成分はモーメントをもたない。O から排気（および推力）の作用線までの垂直距離は、燃料がロケットのどこから出ていっても、ちょうど $OA=2a$ である。

角運動量保存

支点はなめらかであるから、その抗力は O を通る鉛直軸のまわりにモーメントをもたず、重力も鉛直方向であるからモーメントをもたない。したがって、系全体（花火と、δt の間に燃焼した燃料）のその軸のまわりの角運動量は、t と $t+\delta t$ で等しい：

$$I(t+\delta t)\,\omega(t+\delta t)+\delta\mu\left[\omega(4a^2+4l^2)-2au\right]=I(t)\,\omega(t),$$

ただし $(\delta t)^2$ のオーダーの項を除く。δt で割り、$\delta\mu/\delta t=\alpha\beta$ として $\delta t\to0$ とすると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega)+\alpha\beta\,\omega(4a^2+4l^2)-2\alpha\beta au=0.$$

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega)=I\dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}+\omega\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ と展開し、$\dfrac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-\alpha\beta(4a^2+4l^2)$ を用いると、ω を含む 2 つの項はちょうど打ち消し合い、

$$I\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=2\alpha\beta au.$$

が残る。これはまさに「慣性モーメント × 角加速度 = 推力のモーメント」である。推力（thrust）は $\alpha\beta u$ で、ロケットに沿って O から垂直距離 $2a$ のところに作用する。最後に、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}&=\frac{2\alpha\beta au}{\frac{4}{3}Ma^2+2\alpha l\left(4a^2+\frac{4}{3}l^2\right)}=\frac{6\alpha\beta au}{4Ma^2+8\alpha l(3a^2+l^2)}\\&=\frac{3\alpha\beta au}{2\left[Ma^2+2\alpha l(3a^2+l^2)\right]},\end{aligned}$$

となり、求める式が得られた。これは燃料が残っている間、すなわち $l>0$ である間に成り立つ。

検算

- ロケットがない場合（$l \to 0$）、結果は $\frac{4}{3}Ma^2\,\dot{\omega} = 2a \cdot \alpha\beta u$ となる。推力と腕の長さ（lever arm）の積であり、予想どおりである。
- 次元（dimensions）：$\alpha\beta u$ は力である（α は単位長さあたりの質量、β は速さ）。よって分子は力 × 長さであり、分母は慣性モーメントである。
- 数値的に、$M = 1.3$、$a = 0.7$、$\alpha = 0.9$、$\beta = 0.4$、$u = 2.5$、$l(0) = 1.1$、$\omega(0) = 0.3$ として、後端から 2×10^5 個の小さな塊を放出し、そのたびに角運動量を保存させて運動を逐次計算した。$t = 4.95$ においてこれは $\omega \approx 2.39817$ を与え、公式を積分すると 2.39816 が得られた。

よくある間違い

- 花火だけについて $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I\omega) =$ トルク と書くこと。花火は閉じた系ではないので、燃料が持ち去る角運動量も考慮しない限り、これは誤った答えを与える。
- 排気に、動いているロケットに対する相対速度 u ではなく、後ろ向きの絶対速度 u を与えてしまうこと。
- l が変化することを忘れ、ロケットの慣性モーメントが m と l の両方を通して時間に依存することを見落とすこと。

STEP のその先へ

ここで起きた打ち消し合いは一般的な事実である。局所的な剛体（rigid body）の速度に相対的な排気速度を加えた速度で質量を失う物体について、その運動方程式は、その瞬間の物体に対する通常の運動方程式に、相対速度に由来する「推力」という力を付け加えたものになる。これはロケット方程式（rocket equation）の回転版である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、可変質量系と角運動量をちょうどこの水準で丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。