解答例

STEP III 1987、第 11 問

力学 ・ 相対速度と最適化

STEP III 1987、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

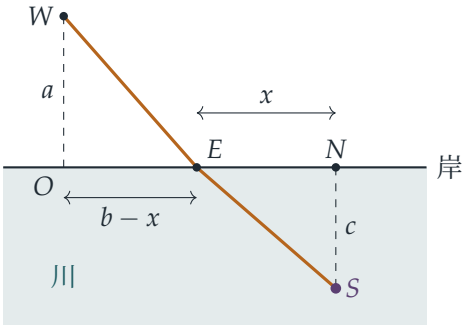
step.maths.org/questions/87-s3-q11

鍵となる考え方

所要時間の合計を 1 変数 x の関数として表し、その導関数（derivative）を 0 とおく。静水の場合、これは光学における屈折（refraction）の問題そのものであり、答えはスネル（Snell）の法則（Snell's law）である。流れがある場合に新たに必要なのは、泳ぐ時間の計算だけである。流れの速度と彼女の泳ぐ速度は大きさが等しいので、その和は菱形（rhombus）の対角線になる。このため、泳ぐ時間は x の意外なほど簡単な関数になる。

解答

女性を質点（particle）とみなし、陸上では一定の速さ u で、水中では水に対して一定の速さ v で、それぞれ直線上を進むとする。岸を X 軸にとり、下流方向を正の向きとし、野原を $Y > 0$ の側とし、女性の位置を $W = (0, a)$ とする。このとき切り株は $S = (b, -c)$ にあり、切り株に最も近い岸の点は $N = (b, 0)$ である。彼女は $E = (b - x, 0)$ で川に入る。これは N から x だけ上流の点である。



走る距離は $WE = \sqrt{a^2 + (b-x)^2}$、泳ぐ距離は $ES = \sqrt{x^2 + c^2}$ である。

静水の場合

所要時間の合計は

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + (b-x)^2}}{u} + \frac{\sqrt{x^2 + c^2}}{v},$$

であるから、

$$T'(x) = -\frac{b-x}{u\sqrt{a^2 + (b-x)^2}} + \frac{x}{v\sqrt{x^2 + c^2}}.$$

関数 $s \mapsto s/\sqrt{k^2 + s^2}$ は増加関数なので、T' の 2 つの項はどちらも x について増加する。よって T' は狭義単調増加であり、T の停留点（stationary point）はちょうど 1 つで、それが最小値（minimum）を与える。$T'(0) < 0 < T'(b)$ であるから、この点は $0 < x < b$ にある。求める方程式は

$$\boxed{\frac{b-x}{u\sqrt{a^2 + (b-x)^2}} = \frac{x}{v\sqrt{x^2 + c^2}}}$$

であり、これは $v(b-x)\sqrt{x^2 + c^2} = ux\sqrt{a^2 + (b-x)^2}$ と同値である。WE と ES が岸の法線（normal）となす角を α、β とすると、この式は $\dfrac{\sin\alpha}{u} = \dfrac{\sin\beta}{v}$ となる。これはスネルの屈折の法則である。

流れのある川の場合

今度は水が下流へ速さ v で流れており、彼女は水に対して速さ v で泳ぐ。直線 ES に沿って進むためには、地面に対する速度が ES の向きになるように、下流方向から下向きに角 θ をなす向きへ泳ぐ方向を選ばなければならない。

考えてみよう 彼女は実際に ES に沿ってどれだけの速さで進むのか。また、なぜ切り株より上流で川に入らなければならないのか。

地面に対する速度は、流れの速度と泳ぐ速度の和である。

$$v\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + v\begin{pmatrix}\cos\theta\\-\sin\theta\end{pmatrix} = 2v\cos\tfrac{\theta}{2}\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\-\sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix},$$

ここで $1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}$ と $\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ を用いた。幾何的に言えば、2 つの速度は長さが等しいので菱形をなし、その和は 2 つの速度のなす角を二等分する。したがって、地面に対する経路は下流方向から下向きに角 $\phi = \theta/2$ をなす。$0 \le \theta \le \pi$ であるから $0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$ となり、彼女は下流へ流されることしかできない。つまり切り株は E より下流になければならず、$x > 0$ である。経路が ES に沿うためには

$$\tan\phi = \frac{c}{x}, \qquad \text{すなわち} \qquad \cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + c^2}},$$

が必要であり、ES に沿った速さは $2v\cos\phi = \dfrac{2vx}{\sqrt{x^2+c^2}}$ である。泳ぐ時間は距離を速さで割ったものである。

$$\frac{\sqrt{x^2+c^2}}{2vx/\sqrt{x^2+c^2}} = \frac{x^2+c^2}{2vx}.$$

よって所要時間の合計は

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}{u} + \frac{x^2+c^2}{2vx} = \frac{\sqrt{a^2+(b-x)^2}}{u} + \frac{1}{2v}\left(x + \frac{c^2}{x}\right), \qquad x > 0,$$

であり、

$$T'(x) = -\frac{b-x}{u\sqrt{a^2+(b-x)^2}} + \frac{1}{2v}\left(1 - \frac{c^2}{x^2}\right).$$

ここでも $x > 0$ において 2 つの項はどちらも x について狭義単調増加である。また $x \to 0^+$ のとき $T'(x) \to -\infty$ であり、x が十分大きければ $T'(x) > 0$ であるから、停留点はちょうど 1 つで、それが所要時間の最小値を与える。$T'(x) = 0$ とおき、両辺に（正の数である）$2vx^2u\sqrt{a^2+(b-x)^2}$ を掛けると

$$2vx^2(b-x) = u(x^2-c^2)[a^2+(b-x)^2]^{\frac{1}{2}},$$

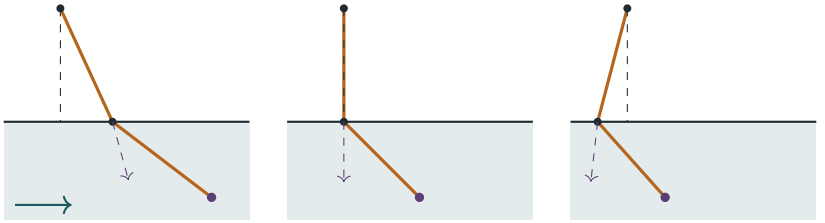
となり、示すべき式が得られる。

3 つの略図

この方程式を解かなくても、x がどこにあるかがわかる。因数 $[a^2+(b-x)^2]^{1/2}$ は正なので、$b-x$ と $x-c$ は同符号でなければならない（あるいは両方とも 0）。

- $b > c$ のとき：$c < x < b$ である。もし $x \le c$ ならば $b-x > 0 \ge x-c$ となり、$x \ge b$ ならば $b-x \le 0 < x-c$ となって、いずれも起こりえない。彼女は $b-x > 0$ の位置、すなわち彼女に最も近い岸の点 O より下流で川に入る。$x > c$ なので、泳ぐ経路が岸となす角は $\phi < 45°$ であり、泳ぐ向き $\theta = 2\phi < 90°$ は下流寄りである。
- $b = c$ のとき：同じ議論により $x = c = b$ である。彼女は O までまっすぐ走り、川を真横に横切る向き（$\theta = 90°$）に泳ぎ、流れによって岸と 45° をなす経路に沿って運ばれる。
- $b < c$ のとき：$b < x < c$ なので $b-x < 0$ である。彼女は川に入るために上流へ走り、45° より急な経路に沿って泳ぎ、泳ぐ向き $\theta > 90°$ は部分的に上流を向く。

下の略図は $a = 3$、$c = 2$、$u = 2$、$v = 1$ とし、$b = 4, 2, 1$ として正確な縮尺で描いたものである。数値的には $x \approx 2.62$、$x = 2$、$x \approx 1.79$ である。流れは右向きであり、E における破線の矢印は、水に対して彼女が泳ぐ向きを表す。



$b > c$　　$b = c$　　$b < c$

検算

- $b = c$ ならば、上で見たとおり、$x = c$ により与えられた方程式の両辺はともに 0 になる。
- 真横に泳ぐ場合（$\theta = 90°$）：横切る方向に v 進むごとに下流へ v 流されるので、経路は 45° をなす。公式によれば、長さ $\sqrt{2}c$ の経路を速さ $2v\cos 45° = \sqrt{2}v$ で進むので、所要時間は c/v となり、当然そうあるべき値に一致する。
- 泳ぐ時間 $(x^2 + c^2)/(2vx)$ は、相加相乗平均の不等式（AM–GM）により $x = c$ で最小となる。これは理にかなっている。走ることに時間がかからないならば、彼女は N から距離 c だけ上流で川に入り、真横に泳げばよい。
- 数値的に、a, b, c, u, v を無作為に 2000 通り選んで T を直接最小化したところ、最小点は常に両方の方程式を満たし、2 番目の場合には常に b と c の間にあった。流れの中を泳ぐ様子を少しずつ追跡する計算でも、泳ぐ時間が確かめられた。たとえば $a = 3$、$b = 4$、$c = 2$、$u = 2$、$v = 1$ のとき $x \approx 2.621$ となる。

よくある間違い

- 切り株に向かってまっすぐ泳ぐかのように、流れの速さを彼女の速さに加えてしまう。実際には、**合成速度**（resultant velocity）が切り株を向くように、狙いをずらして泳がなければならない。
- 流れがある場合は $x > 0$ しかありえないことを忘れる。速さが等しいので、彼女は上流へ少しも進めない。
- x についての方程式を早い段階で 2 乗してしまう。そうすると、x が b と c の間にあることを示す符号の情報が失われる。

STEP のその先へ

最初の答えはスネルの法則であり、これはフェルマー（Fermat）の原理（Fermat's principle）、すなわち「光は所要時間が最小となる経路をとる」という原理から導かれる。経路全体を選んで時間を最小にする問題は、変分法（calculus of variations）の主題である。これに近い問題として、ツェルメロ（Zermelo）の航行問題（Zermelo's navigation problem）がある。これは、場所によって変化する流れの中で、できるだけ早く目的地に着くように船を操る問題である。Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、相対速度（relative velocity）と運動する座標系を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。