解答例

STEP III 1987、第 10 問

純粋数学 ・ ベルヌーイ多項式

> **STEP III 1987、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s3-q10

鍵となる考え方

定義の規則は P_n をその導関数（derivative）を通してしか定めないので、帰納法（induction）の対象として自然なのは、差 $P_n(x+1) - P_n(x) - nx^{n-1}$ の**導関数**である。帰納法の仮定（inductive hypothesis）によってこれは消え、定数だけが残る。そしてその定数は積分の条件によって決まる。その後の和は望遠鏡和（telescoping sum）となり、立方和については P_4 を定数項（constant term）の手前まで求めれば十分である。定数項はどのみち打ち消し合うからである。

解答

差の恒等式

$n \geq 1$ に対して

$$Q_n(x) = P_n(x+1) - P_n(x) - nx^{n-1}.$$

とおく。すべての x について $Q_n(x) = 0$ となることを帰納法で証明する。

基底段階（base case） $n = 1$。 $P_1' = 1 \cdot P_0 = 1$ であるから、ある定数 c を用いて $P_1(x) = x + c$ と書ける。すると $P_1(x+1) - P_1(x) = 1 = 1 \cdot x^0$ となるので、$Q_1 \equiv 0$ である。（実際には $\int_0^1 (x+c)\,\mathrm{d}x = 0$ から $c = -\frac{1}{2}$ が得られるが、これは必要ない。）

帰納段階（inductive step）。 $n \geq 2$ かつ $Q_{n-1} \equiv 0$ と仮定する。微分して $P_n' = nP_{n-1}$

を用いると、

$$\begin{aligned} Q_n'(x) &= nP_{n-1}(x+1) - nP_{n-1}(x) - n(n-1)x^{n-2} \\ &= n[P_{n-1}(x+1) - P_{n-1}(x) - (n-1)x^{n-2}] \\ &= nQ_{n-1}(x) = 0. \end{aligned}$$

よって Q_n は定数であり、$x = 0$ における値に等しい。$n \geq 2$ であるから、項 nx^{n-1} は $x = 0$ で 0 になり、

$$Q_n(0) = P_n(1) - P_n(0).$$

となる。

? **考えてみよう** $P_n(1) = P_n(0)$ であることはどうしてわかるのか。積分の条件は P_n についてのものであって、その値についてのものではない。

一つ下の段階の積分の条件を使う。微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）により、

$$P_n(1) - P_n(0) = \int_0^1 P_n'(x)\,\mathrm{d}x = n\int_0^1 P_{n-1}(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

となる。$n - 1 \geq 1$ であるから、条件 $\int_0^1 P_{n-1}\,\mathrm{d}x = 0$ が適用できるのである。（$n = 1$ の場合を別に扱わなければならなかったのは、まさにこのためである：$\int_0^1 P_0\,\mathrm{d}x = 1$。）したがって $Q_n \equiv 0$ となり、帰納法が完結する：

$$P_n(x+1) - P_n(x) = nx^{n-1} \qquad \text{任意の} n \geq 1.$$

累乗の和

恒等式に $x = m$ を代入し、$m = 0, 1, \ldots, k$ について足し合わせる。右辺は望遠鏡和となる：

$$\begin{aligned} n\sum_{m=0}^{k} m^{n-1} &= \sum_{m=0}^{k} [P_n(m+1) - P_n(m)] \\ &= [P_n(1) - P_n(0)] + [P_n(2) - P_n(1)] + \cdots + [P_n(k+1) - P_n(k)] \\ &= P_n(k+1) - P_n(0), \end{aligned}$$

これが示すべきことであった。（$n = 1$ のとき、$m = 0$ の項は 0^0 であり、これは 1 と読まなければならない。そうすれば両辺はともに $k + 1$ となる。）

立方和

$n=4$ とするので、P_4 が必要である。$P_0=1$ から始めて、毎回積分し、$[0,1]$ 上の積分が 0 になるように定数を選んでいく：

$$\begin{aligned}
&P_1(x) = x - \tfrac{1}{2}, \\
&P_2(x) = x^2 - x + \tfrac{1}{6} && \text{ここで } \textstyle\int_0^1 (x^2 - x)\,\mathrm{d}x = -\tfrac{1}{6}, \\
&P_3(x) = x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x && \text{ここで } \textstyle\int_0^1 (x^3 - \tfrac{3}{2}x^2 + \tfrac{1}{2}x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 0, \\
&P_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + c
\end{aligned}$$

ただし c はある定数である。c は必要ない：$P_4(k+1) - P_4(0)$ において打ち消し合うからである。$y = k+1$ とおくと、

$$P_4(y) - P_4(0) = y^4 - 2y^3 + y^2 = y^2(y-1)^2 = (k+1)^2 k^2.$$

よって $n=4$ の和の公式から

$$\sum_{m=0}^{k} m^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

が得られる。$k=1000$ とすると $\frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}\cdot 1000 \cdot 1001 = 500500$ であるから、

$$\sum_{m=0}^{1000} m^3 = (500500)^2,$$

となり、これが求める結果である。

検算

- 小さな k：$k=2$ とすると $0+1+8=9=\left(\frac{2\cdot 3}{2}\right)^2$ となり、$k=3$ とすると $36=6^2$ となる。
- 同じ方法を $n=2$ で用いると $2\sum m = P_2(k+1) - P_2(0) = (k+1)^2 - (k+1) = k(k+1)$ となり、おなじみの三角数（triangular number）の公式が得られる。立方和がこの平方になっていることに注目しよう。これは気づくと嬉しい事実である。
- コンピュータで $P_1, \ldots, P_{12}$ を厳密な分数を用いて構成すると、ランダムな有理数点で差の恒等式が成り立つこと、および $k \le 39$ で和の公式が成り立つことが確かめられる。立方を直接足し合わせると $250\,500\,250\,000 = 500500^2$ となる。（省略した定数は $c = -\frac{1}{30}$ であることがわかる。）

よくある間違い

- Q_n の定数を、Q_n を $[0,1]$ 上で積分することによって決めようとすること。そうすると $\int_1^2 P_n$ が現れるが、これについては何もわかっていない。$x=0$ で値を求め、P_{n-1} に関する条件を用いるほうがはるかに簡潔である。
- $P_n(1)=P_n(0)$ を示す段階には $n\geq 2$ が必要であり、したがって基底段階は $n=1$ としてそれを手で確かめなければならないことを忘れること。
- 打ち消し合ってしまう P_4 の定数項を求めるのに時間を費やすこと。

STEP のその先へ

ベルヌーイ多項式（Bernoulli polynomials）は母関数（generating function）$\dfrac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n\geq 0}P_n(x)\dfrac{t^n}{n!}$ をもち、その 0 における値はベルヌーイ数（Bernoulli numbers）$1,-\frac{1}{2},\frac{1}{6},0,-\frac{1}{30},\ldots$ である。これらはオイラー＝マクローリンの公式（Euler–Maclaurin formula）の中心をなす。この公式は和を積分およびその誤差項と比較するものである。また、ベルヌーイ多項式はオイラー（Euler）による $\sum 1/n^{2k}$ の計算にも現れる。これらの考え方をさらに学ぶには、Graham、クヌース（Knuth）、Patashnik による *Concrete Mathematics*（邦題『コンピュータの数学』）を読んでみるとよい。この本は累乗の和とベルヌーイ数を詳しく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。