解答例

STEP II 1987、第 8 問

純粋数学 • 空間ベクトルと軌跡

> **STEP II 1987、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q8

鍵となる考え方

各方程式は、位置ベクトル（position vector）が $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ である点 A、B からの距離を用いて書き直すと、何を表しているかがわかるようになる。同値性（equivalence）については、すべてをたった二つの数 $P = |\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2$ と $Q = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2$ で表すことができる。すると (i) と (ii) は P と Q についての簡単な二つの一次方程式となり、(iii) と (iv) も同様である。

解答

以下では一貫して、A、B、R を位置ベクトルがそれぞれ $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{r}$ である点とし、M を AB の中点（midpoint）とする。その位置ベクトルは $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ である。$\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$ と仮定し（$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ の場合は最後に扱う）、$d = |\mathbf{a}-\mathbf{b}| = AB$ とおく。

小問 (i)

展開すると、

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2 &= (|\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + |\mathbf{a}|^2) - (|\mathbf{r}|^2 - 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{r} + |\mathbf{b}|^2) \\ &= -2\Big[(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot\mathbf{r} - \tfrac{1}{2}(|\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2)\Big]. \end{aligned}$$

よって (i) が成り立つのは、ちょうど $|\mathbf{r}-\mathbf{a}| = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|$、すなわち $RA = RB$ のときである。軌跡（locus）は AB **の垂直二等分面**（perpendicular bisector plane）、つまり M を通り法線ベクトル（normal）が $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ である平面である。（これが平面であることは直接にもわかる。(i) は $\mathbf{n} = \mathbf{a}-\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ として $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r} =$ 定数 の形をしており、$(\mathbf{a}-\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2$ であるから $\mathbf{r} = \mathbf{m}$ はこれを満たす。）

小問 (ii)

方程式 (ii) は、$\overrightarrow{RA}$ と $\overrightarrow{RB}$ が垂直であるか、または R が A か B であることを表している。軌跡を特定するために平方完成（completing the square）を行う。

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}-\mathbf{m}|^2 &= |\mathbf{r}|^2 - (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{r} + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \\ &= (\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) - \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \\ &= (\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) + \tfrac{1}{4}|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2.\end{aligned}$$

よって (ii) は $|\mathbf{r}-\mathbf{m}| = \frac{1}{2}d$ と同値である。軌跡は AB **を直径とする球面**（sphere）、すなわち中心 M、半径 $\frac{1}{2}AB$ の球面である。これは「半円に対する円周角は直角である」という事実の三次元版である。

小問 (iii) と (iv)

方程式 (iii) は $RA = d/\sqrt{2}$ を表している。その軌跡は**中心** A**、半径** $AB/\sqrt{2}$ **の球面**である。同様に、(iv) の軌跡は**中心** B**、半径** $AB/\sqrt{2}$ **の球面**である。

同値性

$P = |\mathbf{r}-\mathbf{a}|^2$、$Q = |\mathbf{r}-\mathbf{b}|^2$ とおく。小問 (i) で示したことから、

$$\text{(i)} \iff P = Q.$$

(ii) については、$\mathbf{a}-\mathbf{b} = (\mathbf{a}-\mathbf{r}) - (\mathbf{b}-\mathbf{r})$ と書いて両辺を 2 乗すると、

$$d^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{r}|^2 + |\mathbf{b}-\mathbf{r}|^2 - 2(\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}) = P + Q - 2(\mathbf{a}-\mathbf{r})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{r}).$$

したがって

$$\text{(ii)} \iff P + Q = d^2.$$

方程式 (iii) と (iv) は $P = \frac{1}{2}d^2$ と $Q = \frac{1}{2}d^2$ を表している。ここで

$$(P = Q \text{ かつ} P + Q = d^2) \iff P = Q = \tfrac{1}{2}d^2.$$

右向きの含意が成り立つのは、$Q = P$ を代入すると $2P = d^2$ が得られるからである。逆向きについては、$P = Q = \frac{1}{2}d^2$ ならば当然 $P = Q$ かつ $P + Q = d^2$ である。以上のどの段階も「必要十分」であるから、(i) と (ii) を合わせた条件は (iii) と (iv) を合わせた条件と同値であり、示すべきことが示された。

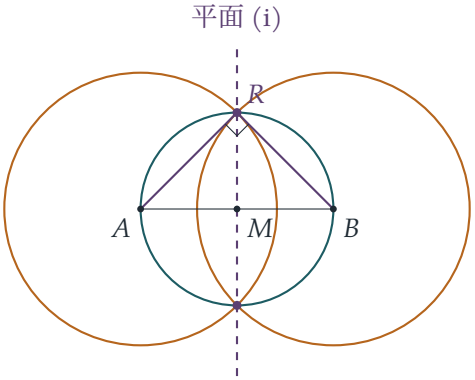
考えてみよう 平面と球面の交わりが、二つの球面の交わりと同じ集合になるのはなぜだろうか？

どちらの組も同じ円を表している。平面 (i) は球面 (ii) の中心 M を通るので、その球面を大円（great circle）で切る。この大円は中心 M、半径 $\frac{1}{2}AB$ で、AB の垂直二等分面上にある。球面 (iii) と (iv) は等しい半径 $AB/\sqrt{2}$ をもち、その和は AB より大きいので、確かに交わる。対称性から、両者は垂直二等分面上にある M を中心とする円で交わる。その半径は、三角形 AMR における三平方の定理（Pythagoras' theorem）より $\sqrt{\frac{1}{2}AB^2 - \frac{1}{4}AB^2} = \frac{1}{2}AB$ であるから、同じ円である。

幾何学的な意味

点 R がこの円上にあるのは、ちょうど三角形 ARB が R を直角とする**直角二等辺三角形**であるときである。(i) と (ii) の組はこれを性質によって表している。すなわち $RA = RB$（二等辺）と $\angle ARB = 90°$（直角）である。(iii) と (iv) の組はこれを辺の長さによって表している。すなわち、斜辺（hypotenuse）が AB である直角二等辺三角形では、他の二辺の長さはともに $AB/\sqrt{2}$ である。上の代数計算は、三平方の定理とその逆（converse）をベクトルの形で述べたものである。恒等式 $d^2 = P + Q - 2(\mathbf{a} - \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{r})$ は三角形 ARB における余弦定理（cosine rule）である。

下図は、A と B を含む任意の平面による断面を示している。二等分面は破線、球面 (ii) は青緑の円、球面 (iii) と (iv) は琥珀色の円として現れる。四つすべてが、解となる円が紙面と交わる 2 点で交わる。



退化した場合

$\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ならば、(i) は $0 = 0$ となってすべての $\mathbf{r}$ に対して成り立ち、一方 (ii)、(iii)、(iv) はいずれも $\mathbf{r} = \mathbf{a}$ を表す。同値性はなお成り立つが、どの軌跡も 1 点 A に退化（degenerate）する（(i) については空間全体となる）。

検算

$\mathbf{a} = (1,0,0)$、$\mathbf{b} = (-1,0,0)$ とする。すると (i) は平面 $x = 0$、(ii) は $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ である。方程式 (iii) と (iv) は $(x \mp 1)^2 + y^2 + z^2 = 2$ であり、両者を引くと再び $x = 0$ が得られる。四つすべては単位円 $y^2 + z^2 = 1$、$x = 0$ で交わる。たとえば $R = (0,1,0)$ とすると $RA = RB = \sqrt{2}$ かつ $\overrightarrow{RA} \cdot \overrightarrow{RB} = -1 + 1 = 0$ となる。また、上のすべての恒等式を、**a**、**b**、**r** を無作為に選んだ 5000 通りについて有理数演算で厳密に確かめた。予測された円上の無作為な点が四つの方程式をすべて満たすことも確認した。

よくある間違い

- (ii) を「円」と述べてしまう。三次元ではこれは球面であり、(i) の軌跡も直線ではなく平面である。
- 一方向しか証明しない。問題は同値性を求めているので、各段階が逆にたどれることを確かめるか、両方向を証明すること。
- 二つの組が「どちらも円を与える」と述べるだけで、それが**同じ**円であること、すなわち平面・中心・半径がすべて一致することを確かめない。

STEP のその先へ

これらの軌跡はいずれも **r** の二次関数の等位集合（level set）であり、二つの球面の方程式を引いて平面を得るという技法は、二つの球面の**根平面**（radical plane）の考え方である。より一般に、同じ幾何学的対象を異なる連立方程式で表すことは、代数幾何学（algebraic geometry）の出発点である。ここでは空間内の円が二つの方程式によって切り出されており、その役目を果たす方程式の組は数多く存在する。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、ベクトルの代数、特に内積（dot product）と長さ・角との関係を強化するのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。