解答例

STEP II 1987、第 7 問

純粋数学 ・ 台形公式と階乗

> **STEP II 1987、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q7

鍵となる考え方

$\ln x$ に対して刻み幅 1 で台形公式（trapezium rule）を用いた和は、加え合わせる高さが $\ln 1, \ln 2, \ldots, \ln n$ であるため、ほぼ $\ln n!$ そのものになる。$\ln x$ は上に凸（concave）であるから、どの弦も曲線の下側にあり、台形公式は常に積分を**過小評価する**。この一つの事実が、すべての不等式の向きを決める。最後の小問では、細かい格子での誤差を尺度変換し、別の区間上の刻み幅 1 の誤差に書き直すのがこつである。そうすれば、$\mathrm{g}(kn)$ の背後にある誤差と直接比較できる。

解答

公式の正当化

$[x_0, x_N]$ を幅 h の N 個の帯 $[x_r, x_{r+1}]$ に分割する。各帯で、曲線を $(x_r, \mathrm{f}(x_r))$ と $(x_{r+1}, \mathrm{f}(x_{r+1}))$ を結ぶ直線、すなわち弦（chord）で置き換える。弦の下の領域は面積 $\frac{1}{2}h\{\mathrm{f}(x_r) + \mathrm{f}(x_{r+1})\}$ の台形である。$r = 0, 1, \ldots, N-1$ について加えると、内部の縦座標（ordinate）$\mathrm{f}(x_1), \ldots, \mathrm{f}(x_{N-1})$ はそれぞれ隣り合う二つの台形に現れ、両端の縦座標は一度ずつ現れるので、与えられた公式が得られる。h が小さければ弦は曲線の近くにとどまるので、近似はよい。

刻み幅 1 と $n! \approx \mathrm{g}(n)$

$u = \ln x$、$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ として部分積分（integration by parts）を行うと、

$$I_n = \int_1^n \ln x \, \mathrm{d}x = \Big[x \ln x\Big]_1^n - \int_1^n 1 \, \mathrm{d}x = n \ln n - n + 1.$$

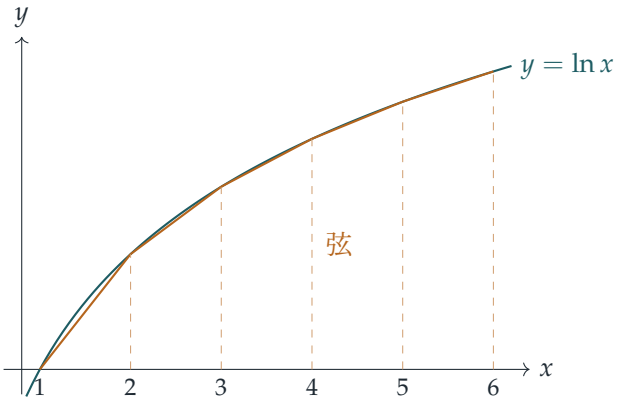
$h=1$ のとき縦座標は $x=1,2,\dots,n$ にあるので、台形和は

$$\begin{aligned} T_n &= \tfrac{1}{2}\{\ln 1 + 2\ln 2 + \cdots + 2\ln(n-1) + \ln n\} \\ &= \ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n - \tfrac{1}{2}\ln n = \ln n! - \tfrac{1}{2}\ln n \end{aligned}$$

となる。ここで $\ln 1 = 0$ を用いた。$T_n \approx I_n$ とおくと、

$$\ln n! \approx (n+\tfrac{1}{2})\ln n + 1 - n, \qquad \text{よって} \qquad n! \approx n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-n} = \mathrm{g}(n).$$

$n! < \mathrm{g}(n)$ となる理由



$\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln x = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ であるから、曲線 $y=\ln x$ は狭義に上に凸である。すなわち、各帯 $[m, m+1]$ において、弦は端点を除いて曲線の真に下側にある（図を参照）。したがって各台形の面積は、その帯における曲線の下の領域の面積より真に小さく、$n-1 \geq 1$ 個の帯について加えると、

$$T_n < I_n \quad \Longrightarrow \quad \ln n! - \tfrac{1}{2}\ln n < n\ln n - n + 1 \quad \Longrightarrow \quad \ln n! < \ln \mathrm{g}(n).$$

exp は増加関数であるから、$n! < \mathrm{g}(n)$ である。

幅 $1/k$ の帯

今度は $h = 1/k$、$N = k(n-1)$ であり、$r = 0,1,\dots,k(n-1)$ に対して $x_r = 1 + \frac{r}{k} = \frac{k+r}{k}$ である。最後の縦座標は $x_N = n$ である。台形和を「すべての縦座標の和から両端の縦座標の半分ずつを引いたものの h 倍」と書き、$\ln x_0 = 0$ を用いると、

$$T_n^{(k)} = \frac{1}{k}\left\{\sum_{r=0}^{k(n-1)} \ln\frac{k+r}{k} - \tfrac{1}{2}\ln n\right\}.$$

分子 $k+r$ は $k, k+1, \dots, kn$ を動き、分母には k が $k(n-1)+1$ 個あるので、

$$\sum_{r=0}^{k(n-1)} \ln\frac{k+r}{k} = \ln\frac{(kn)!}{(k-1)!} - \big(k(n-1)+1\big)\ln k = \ln\frac{(kn)!}{k!} - k(n-1)\ln k$$

となる。ここで $(k-1)!\,k = k!$ を用いた。$kT_n^{(k)} \approx kI_n = kn\ln n - kn + k$ とおいて整理すると、

$$\begin{aligned}\ln(kn)! &\approx \ln k! + k(n-1)\ln k + \tfrac{1}{2}\ln n + kn\ln n + k(1-n)\\ &= \ln k! + \left(kn+\tfrac{1}{2}\right)\ln n + k(1-n)(1-\ln k),\end{aligned}$$

すなわち、

$$(kn)! \approx k!\, n^{kn+\frac{1}{2}} \left(\frac{\mathrm{e}}{k}\right)^{k(1-n)} =: A$$

となり、求める結果が得られた。

どちらがより近いか

整数 $a < b$ に対して、誤差 $\displaystyle\int_a^b \ln t\,\mathrm{d}t -$ (刻み幅 1 の台形和、区間$[a,b]$) を $E(a,b)$ と書く。上で述べた凸性の議論により $E(a,b) > 0$ であり、誤差は隣り合う区間について加法的である：$E(1,b) = E(1,a) + E(a,b)$。

A の導出は、$T_n^{(k)}$ を I_n で置き換えた点を除けば厳密であったから、

$$\ln A - \ln(kn)! = k\left(I_n - T_n^{(k)}\right).$$

同様に、刻み幅 1 の場合の計算で n を kn に置き換えると、$\ln \mathrm{g}(kn) - \ln(kn)! = E(1,kn)$ である。

考えてみよう 幅 $1/k$ の格子での誤差を、幅 1 の格子での誤差とどうすれば比較できるだろうか。

$x = t/k$ と置換する。縦座標 $x_r = (k+r)/k$ は $t = k, k+1, \ldots, kn$ に移り、$\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/k$ であるから、

$$k\left(I_n - T_n^{(k)}\right) = \int_k^{kn} \ln\frac{t}{k}\,\mathrm{d}t \;-\; \left(\text{刻み幅 1 の台形和：関数 } \ln\tfrac{t}{k}\text{、区間}[k,kn]\right).$$

$\ln\frac{t}{k} = \ln t - \ln k$ であり、台形公式は定数 $\ln k$ に対して厳密であるから、定数は打ち消し合い、これはちょうど $E(k,kn)$ になる。したがって

$$\ln \mathrm{g}(kn) - \ln(kn)! = E(1,kn) = E(1,k) + E(k,kn) = E(1,k) + \left(\ln A - \ln(kn)!\right).$$

A と $\mathrm{g}(kn)$ はともに $(kn)!$ より大きく、$k \geq 2$ のとき $E(1,k) > 0$ であるから、

$$(kn)! < A < \mathrm{g}(kn) \qquad (k \geq 2).$$

よって、差で測っても比で測っても、新しい近似 A は $\mathrm{g}(kn)$ よりも $(kn)!$ に近い。$k = 1$ のときは $A = 1!\,n^{n+\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{1-n} = \mathrm{g}(n)$ となり、両者は一致する。言葉で言えば、A は最初の k 個の因数に対して**厳密な**値 $k!$ を用い、残りだけを近似しているので、ln が最も大きく曲がる曲線の始まりの部分から生じる誤差 $E(1,k)$ を避けているのである。

検算

- 最終的な公式で $k=1$ とすると、当然ながら $\mathrm{g}(n)$ に戻る。
- $n=5$ とすると、$5!=120$、$\mathrm{g}(5)=5^{5.5}\mathrm{e}^{-4}\approx 128.0$ であり、確かに $n!<\mathrm{g}(n)$ である。
- $k=3$、$n=5$ とすると、$15!\approx 1.3077\times 10^{12}$、$A\approx 1.3369\times 10^{12}$、$\mathrm{g}(15)\approx 1.4102\times 10^{12}$ であり、$(kn)!<A<\mathrm{g}(kn)$ が確かめられる。
- 比 $\mathrm{g}(kn)/A=\exp E(1,k)$ は k のみに依存し、n にはよらない。$k=3$ のときこれは $\mathrm{g}(3)/3!\approx 1.0548$ であり、上の数値と一致する。

よくある間違い

- 幅 $1/k$ の和で k の個数を数え間違えること。縦座標は $k(n-1)+1$ 個あり、余分の $\ln k$ が $(k-1)!$ を $k!$ に変えるのである。
- 弦が曲線の上側にある図をもとに「$n!<\mathrm{g}(n)$」を論じること。上に凸な関数では弦は下側にあり、台形公式は過小評価する。
- $\ln A$ の誤差が細かい格子での誤差そのものではなく、その k 倍であることを忘れること。

STEP のその先へ

ここでの $\mathrm{g}(n)$ は、スターリング（Stirling）の公式 $n!\sim\sqrt{2\pi n}\,n^n\mathrm{e}^{-n}$ の粗い形である。誤差 $E(1,n)$ は n について増加し、かつ有界である（各帯の誤差は定数の $1/m^2$ 倍以下である）から収束（converge）し、このことが $n!/\mathrm{g}(n)$ が定数 $\sqrt{2\pi}/\mathrm{e}\approx 0.922$ に収束する理由を説明する。オイラー–マクローリンの公式（Euler–Maclaurin formula）はこれを精密にし、完全な漸近級数（asymptotic series）を与える。Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis*（実解析入門）は、リーマン積分（Riemann integral）と、これを支える数値積分公式の誤差評価を扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。