解答例

STEP II 1987、第 6 問

純粋数学 • 対称性を用いた定積分

> **STEP II 1987、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q6

鍵となる考え方

区間 $[-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ は対称なので、まず自然に試すべきは反転 $\theta \mapsto -\theta$ である。これは $\sin\theta$ を $-\sin\theta$ に変え、2 番目の形をただちに与える。2 つの形の平均をとると奇関数部分（odd part）が消え、分母は $\sin^2\theta$ だけを含む形になる。これを少し代数的に変形すると、定数と標準的な $\tan\theta$ の積分とに分けられる。最後の小問は、一見何でもない 1 つのステップに関するものである。すなわち、$\sqrt{\cos^2 2\alpha}$ は $|\cos 2\alpha|$ であって、$\cos 2\alpha$ ではない。

解答

以下を通して $s = \sin 2\alpha$、$c = \cos 2\alpha$ とおく。したがって $s^2 + c^2 = 1$ である。$0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$ のとき $0 < s < 1$ かつ $0 < c < 1$ である。$s < 1$ より分母 $1 \mp s\sin\theta$ は区間全体で正であるから、どの積分も広義積分ではない（proper）。

I の 2 番目の形

$\theta = -\phi$ と置換すると、$\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$ であり、積分の上端と下端が入れ替わる：

$$I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{-\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2(-\phi)}{1 - \sin(-\phi)\,s}\,(-\mathrm{d}\phi) = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\phi}{1 + s\sin\phi}\,\mathrm{d}\phi,$$

ここで $\cos(-\phi) = \cos\phi$ と $\sin(-\phi) = -\sin\phi$ を用いた。ϕ を θ と書き直せば、求める形が得られる。

$\cot^2 2\alpha$ を含む式

I の 2 つの表示を足し合わせると、

$$2I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\theta \left(\frac{1}{1 - s\sin\theta} + \frac{1}{1 + s\sin\theta} \right) \mathrm{d}\theta = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{2\cos^2\theta}{1 - s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

したがって

$$I = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos^2\theta}{1 - s^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta.$$

次に、$1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$ と $1 - s^2 = c^2$ を用いて分母を書き換える：

$$1 - s^2\sin^2\theta = \cos^2\theta + c^2\sin^2\theta.$$

考えてみよう $\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta}$ を、定数と積分できる部分との和にどう分ければよいか？

分子を、分母の定数倍と、$\cos^2\theta$ で割った後に θ に依存しない余りとの和として書くことを目指す。

$$(\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta) - c^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = (1 - c^2)\cos^2\theta = s^2\cos^2\theta,$$

であるから、$s^2(\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta)$ で割ると（$s \neq 0$ なので許される）

$$\frac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta} = \frac{1}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta} = \frac{1}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\sec^2\theta}{1 + c^2\tan^2\theta},$$

が得られる。ここで最後のステップでは分子と分母を $\cos^2\theta$ で割った。長さ π の区間で積分し、$c^2/s^2 = \cot^2 2\alpha$ を用いると

$$I = \frac{\pi}{\sin^2 2\alpha} - \cot^2 2\alpha \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sec^2\theta}{1 + \cos^2 2\alpha\tan^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

となり、求める式が得られた。

I の値を求める

残った積分を J とおく。$t = \tan\theta$ と置換すると $\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ であり、θ が $-\frac{1}{2}\pi$ から $\frac{1}{2}\pi$ まで動くとき、t は実数直線全体を動く。したがって $c \neq 0$ のとき

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1 + c^2t^2} = \left[\frac{1}{|c|}\arctan(|c|\,t) \right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{\pi}{|c|}.$$

（$|c|$ が現れるのは置換 $u = |c|t$ のためである。これにより、積分範囲が $-\infty$ から ∞ へと正しい順序のまま保たれる。）

$0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$ のとき $c > 0$ であるから $J = \pi/c$ であり、

$$I = \frac{\pi}{s^2} - \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\pi}{c} = \frac{\pi(1-c)}{1-c^2} = \frac{\pi}{1+c} = \frac{\pi}{1+\cos 2\alpha} = \frac{\pi}{2\cos^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi\sec^2\alpha,$$

となる。ここで $1-c \neq 0$ で約分し、$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$ を用いた。これが求める結果である。

$\frac{1}{4}\pi < \alpha < \frac{1}{2}\pi$ の場合

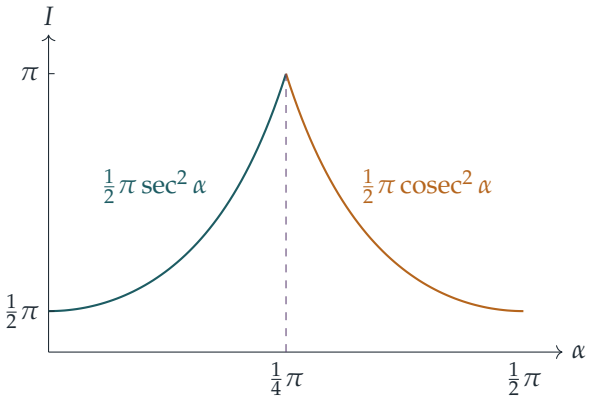
考えてみよう α が $\frac{1}{4}\pi$ を越えると、議論のどこかが変わるだろうか？

ほとんど何も変わらない。依然として $0 < s < 1$ であるから、I を J で表す式までの各ステップはそのまま成り立つ。唯一の違いは、今度は $c = \cos 2\alpha < 0$ となることであり、$|c| = -c$ かつ $J = -\pi/c$ となる。よって

$$I = \frac{\pi}{s^2} + \frac{c^2}{s^2}\cdot\frac{\pi}{c} = \frac{\pi(1+c)}{1-c^2} = \frac{\pi}{1-c} = \frac{\pi}{2\sin^2\alpha} = \tfrac{1}{2}\pi\operatorname{cosec}^2\alpha,$$

ここで $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$ を用いた。最初の答えを何も考えずに写すと、誤った値になってしまう。

I を α に対してグラフに描くと、2つの式が $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ でつながり、そこでどちらも π に等しいことがわかる：



検算

- $\alpha = \frac{1}{4}\pi$ では $s = 1$ であり、被積分関数は $\cos^2\theta/(1-\sin\theta) = 1+\sin\theta$ となり、その積分は π である。そこではどちらの式も π を与えており、当然そうなるべきである。

- $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ のとき：$s = \frac{\sqrt{3}}{2}$、$c = \frac{1}{2}$ であるから $I = \pi/(1+c) = \frac{2}{3}\pi$ であり、また $\frac{1}{2}\pi\sec^2\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\pi\cdot\frac{4}{3} = \frac{2}{3}\pi$ である。
- もとの積分に対し、$\frac{1}{4}\pi$ の両側から無作為に選んだ 10 個の α の値でシンプソンの公式（Simpson's rule）を適用すると、公式と 10^{-6} より良い精度で一致する。たとえば $\alpha \approx 0.6308$ では、どちらの方法でも $I \approx 2.408759$ となる。
- $\alpha \to 0$ のとき被積分関数は $\cos^2\theta$ に近づき、その積分は $\frac{1}{2}\pi$ であって、$\frac{1}{2}\pi\sec^2 0$ と一致する。

よくある間違い

- 絶対値をつけずに $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}t}{1+c^2t^2} = \frac{\pi}{c}$ と書いてしまう。$c<0$ のときこれは負になるが、正の被積分関数に対してそれはありえない。
- $\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}\phi$ のマイナス符号を落とす、あるいはそれが積分の上端と下端の入れ替えによって打ち消されることを忘れる。
- $t = \tan\theta$ が $\theta = \pm\frac{1}{2}\pi$ で定義されないことを心配する。t に関する積分は広義積分（improper integral）であるが収束するので、それで十分である。

STEP のその先へ

答えに見られるきれいな対称性 $\alpha \leftrightarrow \frac{1}{2}\pi - \alpha$ は偶然ではない。I は $\sin 2\alpha$ を通してのみ α に依存し、これはその入れ替えで変わらないが、$\frac{1}{2}\pi\sec^2\alpha$ のような式は変わってしまう。黙って 2 乗したり平方根をとったりする代数計算は、まさにこの種の問題を隠しうる。$\sin\theta$ と $\cos\theta$ の有理関数を 1 周期にわたって積分すること（ここで平均をとった被積分関数は周期 π をもつので、その一例である）は、大学では単位円に沿った周回積分（contour integration）によって日常的に計算される。そこでは留数定理（residue theorem）のおかげで、ほとんど機械的な計算になる。美しく幾何学的な入門書として、Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）を参照されたい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。