解答例

STEP II 1987、第 5 問

純粋数学 ・ ラグランジュの反転公式による級数

> **STEP II 1987、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q5

鍵となる考え方

ラグランジュ（Lagrange）の恒等式（Lagrange's identity）は、いわば計算機械である。関数 $\phi(y) = y - \mathrm{f}(y)$ を入力し、それを n 乗して $n-1$ 回微分し、足し合わせる。作業のすべては、ϕ が単純な形、理想的には y の単一のべきや単一の指数関数になるように問題を設定することにある。そうすれば ϕ^n の $(n-1)$ 階導関数（derivative）がただちに書き下せるからである。各小問では、解くべき方程式が都合のよい y の値に対して $\mathrm{f}(x) = y$ の形になるように f を選ぶ。

解答

以下を通じて $\phi(y) = y - \mathrm{f}(y)$ と書く。すると恒等式は

$$\mathrm{f}^{-1}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} [\phi(y)^n].$$

となる。$n = 1$ の項には 0 階導関数が現れるが、これは $\phi(y)$ そのものであることに注意する。

繰り返し用いる事実はただ一つで、$m \geq n-1$ を満たす整数 m に対して

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}} y^m = \frac{m!}{(m-n+1)!} y^{m-n+1},$$

が成り立つことである。微分するたびにその時点の指数が係数として前に出て、指数が 1 だけ下がるからである。

小問 (i)

$f(x) = \alpha x$ のとき $\phi(y) = (1-\alpha)y$ であるから、$\phi(y)^n = (1-\alpha)^n y^n$ である。上の公式で $m = n$ として $n-1$ 回微分すると

$$\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}[(1-\alpha)^n y^n] = (1-\alpha)^n\, n!\, y.$$

となる。$n!$ が $\frac{1}{n!}$ と打ち消し合うので、恒等式の右辺は

$$y + \sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha)^n y = y \sum_{n=0}^{\infty} (1-\alpha)^n.$$

となる。これは公比（common ratio）$1-\alpha$ の等比級数（geometric series）である。$0 < \alpha < 2$ より $-1 < 1-\alpha < 1$ であるから、この級数は収束（converge）し、その和は

$$y \cdot \frac{1}{1-(1-\alpha)} = \frac{y}{\alpha}.$$

である。一方、$y = \alpha x$ からは直接 $x = y/\alpha$ が得られるので、$f^{-1}(y) = y/\alpha$ である。両者は一致し、この場合に恒等式が成り立つことが確かめられた。条件 $0 < \alpha < 2$ は、ちょうど級数が収束するための条件になっている。

小問 (ii)

方程式は $f(x) = \frac{1}{2}$ であり、

$$f(x) = x - \tfrac{1}{4}x^3, \qquad \text{よって} \qquad \phi(y) = y - f(y) = \tfrac{1}{4}y^3.$$

である。このとき $\phi(y)^n = 4^{-n} y^{3n}$ であり、導関数の公式を $m = 3n$（これは $n-1$ 以上である）として用いると

$$\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}[4^{-n} y^{3n}] = \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\, y^{2n+1}.$$

となる。したがってラグランジュの恒等式から

$$f^{-1}(y) = y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\, y^{2n+1}.$$

が得られる。先頭の y は、この一般項で $n = 0$ としたものにちょうど等しい。実際 $\frac{0!}{0!\,1!\,4^0}\, y^1 = y$ である。よってこれを和に含めて $n = 0$ から始めることができる：

$$f^{-1}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,4^n}\, y^{2n+1}.$$

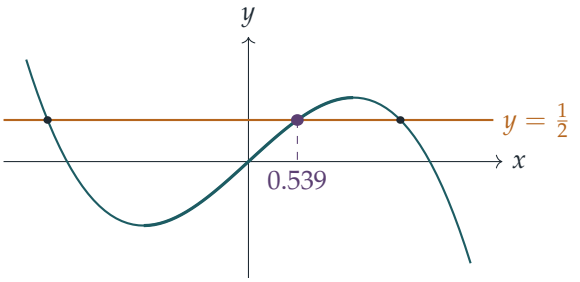
ここで $y = \frac{1}{2}$ とおく。$4^n \cdot 2^{2n+1} = 2^{2n} \cdot 2^{2n+1} = 2^{4n+1}$ であるから

$$x = f^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!\,2^{4n+1}},$$

となり、$f(x) = \frac{1}{2}$ であるから、この x は求めるとおり $\frac{1}{2} = x - \frac{1}{4}x^3$ の根である。

考えてみよう この 3 次方程式は 3 つの実数解をもつ。級数が与えるのはどれか。

関数 f は実数全体では一対一（one-to-one）ではないので、「f^{-1}」は級数が表す分枝（branch）を意味する。この級数は $y+\cdots$ で始まる y のべき級数（power series）であるから、$\mathrm{f}^{-1}(0)=0$ であり、y が小さいとき $\mathrm{f}^{-1}(y)\approx y$ となる。つまりこれは、$\mathrm{f}'(x)=1-\frac{3}{4}x^2>0$ すなわち $|x|<2/\sqrt{3}$ となる、原点を通る増加部分に f を制限したものの逆関数である。最初のいくつかの項は $\frac{1}{2}+\frac{1}{32}+\frac{3}{512}+\cdots\approx 0.537$ であり、和は小数第 4 位まで 0.5392 である。これは下図に印をつけた最小の正の根である。他の根、およそ 1.675 と -2.214 は、曲線の減少部分にある。



曲線の太い部分が原点を通る増加分枝であり、級数はその上の根（プラム色で示したもの）を与える。

小問 (iii)

ここでの工夫は、方程式全体を ϕ が単純になるような $\mathrm{f}(x)=y$ の形にすることである。$x=\mathrm{e}^{\lambda x}$ を

$$x-\mathrm{e}^{\lambda x}=0,$$

と変形し、

$$\mathrm{f}(x)=x-\mathrm{e}^{\lambda x},\qquad \phi(y)=y-\mathrm{f}(y)=\mathrm{e}^{\lambda y},$$

とおく。求めたいのは $x=\mathrm{f}^{-1}(0)$ である。$\phi(y)^n=\mathrm{e}^{n\lambda y}$ であり、1 回微分するごとに $n\lambda$ 倍されるので

$$\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}y^{n-1}}\,\mathrm{e}^{n\lambda y}=(n\lambda)^{n-1}\mathrm{e}^{n\lambda y}.$$

となる（$n=1$ のときこれは正しく $\mathrm{e}^{\lambda y}$ となる）。ラグランジュの恒等式から

$$\mathrm{f}^{-1}(y)=y+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n\lambda)^{n-1}}{n!}\,\mathrm{e}^{n\lambda y},$$

が得られ、$y = 0$ とおくと

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{n!}\lambda^{n-1} = 1 + \lambda + \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{8}{3}\lambda^3 + \frac{125}{24}\lambda^4 + \cdots .$$

となる。添字をずらせば、同値な形として $x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{n!}\lambda^n$ と書ける。

どのような λ に対してこれは収束するか。隣り合う項の比は

$$\frac{(n+1)^n\lambda^n/(n+1)!}{n^{n-1}\lambda^{n-1}/n!} = \lambda\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} \to \mathrm{e}\lambda,$$

であるから、比判定法（ratio test）により、級数は $|\lambda| < 1/\mathrm{e}$ で収束する。これは自然な境界である。$y = x$ が $y = \mathrm{e}^{\lambda x}$ に接する（tangent）のはちょうど $\lambda = 1/\mathrm{e}$ のとき（$x = \mathrm{e}$ において）であり、$\lambda > 1/\mathrm{e}$ では実数解がまったく存在しない。$0 < \lambda < 1/\mathrm{e}$ では正の根が 2 つあり、級数はそのうち小さい方、すなわち $\lambda \to 0$ のとき 1 に近づく方を与える。

検算

- (ii) で、最初の 4 項は $\frac{1}{2}$、$\frac{1}{32}$、$\frac{3}{512}$、$\frac{3}{2048}$ である。200 項を数値的に足すと 0.539189 となり、$x^3 - 4x + 2 = 0$ にニュートン法（Newton's method）を適用すると根 0.5391888… が得られ、機械精度で一致する。
- (iii) で $\lambda = 0$ とおくと、級数は $x = 1$ を与え、確かに $x = \mathrm{e}^0 = 1$ である。$\lambda = 0.2$ に対して級数を計算すると $x \approx 1.29586$ となり、$\mathrm{e}^{0.2\times 1.29586} = 1.29586$ である。$\lambda = -0.3$ に対しては 0.78918 となり、これも方程式を満たす。$\lambda = 0.2$ のときのもう一方の根はおよそ 12.71 であり、級数の値とは大きく離れている。
- (i) で $\alpha = 1$ としてみる。このとき $\phi = 0$ であり、和のすべての項が消えて、当然ながら $\mathrm{f}^{-1}(y) = y$ となる。

よくある間違い

- $n = 1$ の項では微分を行わない（0 階導関数である）ことを忘れ、その項を落としたり誤って計算したりする。
- (ii) で、単独の y が一般式の $n = 0$ の項であることに気づかず、$n = 0$ から始まる和と一致させられない。
- (iii) で $\mathrm{f}(x) = x\mathrm{e}^{-\lambda x}$ などを試す。それ自体は正当だが、そうすると ϕ が 2 項の差になり、導関数の計算が煩雑になる。$\phi = \mathrm{e}^{\lambda y}$ と選べば、導関数の計算は自明になる。

STEP のその先へ

これは**ラグランジュの反転定理**（Lagrange inversion theorem）であり、通常は複素解析（complex analysis）（コーシー（Cauchy）の留数定理（residue theorem））や形式的べき級数（formal power series）を用いて証明される。(iii) の係数 $(n+1)^{n-1}/n!$ はランベルト（Lambert）の W 関数（Lambert W function）に現れるものであり、n^{n-1} は n 個の頂点上の根付きラベル付き木（rooted labelled trees）の個数を数える。同様に、(ii) の数 $\frac{(3n)!}{n!\,(2n+1)!}$ は三分木（ternary trees）の個数を数えるもので、カタラン数（Catalan numbers）の仲間である。このようにラグランジュの反転は数え上げ組合せ論（enumerative combinatorics）の中心的な道具である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は複素解析的な背景を与えてくれ、Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）には級数を扱う STEP の演習問題がさらに収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。