解答例

STEP II 1987、第 4 問

純粋数学 • 複素数と図形

> **STEP II 1987、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q4

鍵となる考え方

$e^{i\theta}$ を掛けることは回転（rotation）であり、正三角形（equilateral triangle）とは、まさに 1 辺を 1 つの頂点のまわりに 60° 回転させたときに得られる図形である。これにより、幾何の問題が α, β, γ についての一次方程式（linear equation）に変わる。どちらの向き（orientation）も許すということは、2 つの一次式の**どちらか一方**が 0 になるということであり、その積が問題文にある対称（symmetric）な二次式である。この式は対称式なので、三次方程式（cubic）の係数（coefficients）で表すことができる。

解答

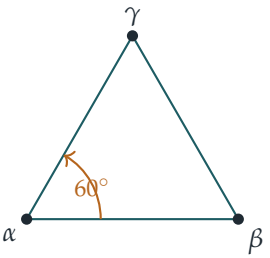
以下を通して $\omega = e^{2\pi i/3}$ とする。したがって $\omega^3 = 1$、$\bar{\omega} = \omega^2$、$1 + \omega + \omega^2 = 0$ である。

$e^{i\theta}$ を掛けること

$z = re^{i\varphi}$ ならば $ze^{i\theta} = re^{i(\varphi+\theta)}$ である。すなわち、絶対値（modulus）は変わらず、偏角（argument）は θ だけ増える。よって点 $ze^{i\theta}$ は、点 z を原点のまわりに角 θ だけ反時計回り（anticlockwise）に回転させた像である。

より一般に、$\gamma - \alpha = e^{i\theta}(\beta - \alpha)$ は、α から γ へのベクトルが、α から β へのベクトルを反時計回りに θ だけ回転させたものであることを表している。つまり、γ は β を α のまわりに θ だけ回転させた像である。

反時計回りの正三角形



相異なる点 α, β, γ がこの順に反時計回りの正三角形をなすのは、γ が β を α のまわりに反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ 回転させて得られるとき、すなわち

$$\gamma - \alpha = e^{i\pi/3}(\beta - \alpha).$$

が成り立つとき、かつそのときに限る。（必要性（necessity）：そのような三角形では $|\alpha\gamma| = |\alpha\beta|$ であり、α における角は、$\alpha\beta$ から $\alpha\gamma$ へ反時計回りに測って $\frac{\pi}{3}$ である。十分性（sufficiency）：この式から $|\alpha\gamma| = |\alpha\beta|$ であり、両者のなす角は $\frac{\pi}{3}$ である。よって三角形は頂角が $60°$ の二等辺三角形（isosceles triangle）であるから正三角形であり、向きは反時計回りである。）

これを対称な形に書くほうがすっきりする。$e^{i\pi/3} = -\omega^2$ である（$e^{7\pi i/3} = e^{i\pi/3}$ を用いると $-\omega^2 = e^{i\pi}e^{4\pi i/3} = e^{i\pi/3}$ となるからである）。よって条件は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \gamma - \alpha = -\omega^2\beta + \omega^2\alpha \\ \iff \quad & \gamma + \omega^2\beta - (1+\omega^2)\alpha = 0 \\ \iff \quad & \gamma + \omega^2\beta + \omega\alpha = 0, \end{aligned}$$

ここで $1 + \omega^2 = -\omega$ を用いた。ω^2 を掛ける（これは 0 でないので、この操作は可逆である）と、同値な条件

$$\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0.$$

が得られる。簡単な確認をしておこう。$1, \omega, \omega^2$ は反時計回りに並んだ正三角形の頂点であり、実際 $1 + \omega \cdot \omega + \omega^2 \cdot \omega^2 = 1 + \omega^2 + \omega = 0$ である。

どちらの向きでもよい場合

正三角形をなす相異なる 3 点は、α, β, γ の順か α, γ, β の順のいずれかで反時計回りに並ぶ（巡回的に並べ替えても向きは変わらない）。前の部分により、相異なる α, β, γ に対して

$$\begin{aligned} \text{正三角形} & \iff \alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0 \text{ または } \alpha + \omega\gamma + \omega^2\beta = 0 \\ & \iff (\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma)(\alpha + \omega^2\beta + \omega\gamma) = 0. \end{aligned}$$

考えてみよう この積が求めたい式であることは、どうすればわかるだろうか。

単に展開すればよい。2 乗の項からは $\alpha^2+\omega^3\beta^2+\omega^3\gamma^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$ が得られる。交差項は

$$\begin{aligned}\alpha\beta(\omega^2+\omega)+\alpha\gamma(\omega+\omega^2)+\beta\gamma(\omega^2+\omega^4)&=\alpha\beta(\omega+\omega^2)+\gamma\alpha(\omega+\omega^2)+\beta\gamma(\omega^2+\omega)\\&=-\alpha\beta-\gamma\alpha-\beta\gamma,\end{aligned}$$

である。ここで $\omega^4=\omega$ と $\omega+\omega^2=-1$ を用いた。したがって

$$(\alpha+\omega\beta+\omega^2\gamma)(\alpha+\omega^2\beta+\omega\gamma)=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta,$$

であり、ゆえに相異なる点 α,β,γ が（ある順序で）正三角形をなすための必要十分条件は

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\beta\gamma-\gamma\alpha-\alpha\beta=0,$$

である。これが示すべきことであった。

相異なるという条件を外すとどうなるかにも注意しておく価値がある。たとえば $\alpha=\beta$ ならば、この式は $(\alpha-\gamma)^2$ となり、これが 0 になるのは $\gamma=\alpha$ でもあるときに限る。よってこの式が 0 になるのは、3 点が正三角形をなすとき、**または 3 点がすべて一致するとき**、かつそのときに限る。このことを以下で用いる。

三次方程式

$z^3+az^2+bz+c=0$ の解を α,β,γ とする。このとき

$$\alpha+\beta+\gamma=-a,\qquad \beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta=b,\qquad \alpha\beta\gamma=-c.$$

である。この式は対称式なので、これらを用いて表す。

$$\begin{aligned}\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)&=(\alpha+\beta+\gamma)^2-3(\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha\beta)\\&=a^2-3b.\end{aligned}$$

上の注意により、$a^2=3b$ となるのは、解が正三角形をなすか、すべて等しいとき、かつそのときに限る。3 つの解がすべて t に等しいとは $z^3+az^2+bz+c=(z-t)^3$ ということであり、よって $a=-3t$、$b=3t^2$、$c=-t^3$、すなわち $b=\frac{a^2}{3}$ かつ $c=\frac{a^3}{27}$ である。したがって、解が（本当の）正三角形の頂点にあるための必要十分条件は

$$\boxed{a^2=3b\quad\text{かつ}\quad 27c\neq a^3}$$

である。一致する 3 点を退化した正三角形とみなしてよいなら、条件は単に $a^2=3b$ となる。

これを直接見るうまい方法がある。$z = w - \frac{a}{3}$ と置き換えると z^2 の項が消える。$a^2 = 3b$ のときは一次の項も消え、方程式は $w^3 = \frac{a^3}{27} - c$ となる。その解は 0 でない数の 3 つの立方根であり、これらは $w = 0$、すなわち $z = -\frac{a}{3}$ を中心とする正三角形をなす。この点は解の重心（centroid）である。

検算

- $z^3 - 1 = 0$（$a = b = 0, c = -1$）の解は $1, \omega, \omega^2$ であり、正三角形をなす。実際 $a^2 = 0 = 3b$ かつ $27c = -27 \neq 0$ である。
- $z^3 - z = 0$ の解は $0, \pm 1$ であり、一直線上にある。このとき $a^2 - 3b = 3 \neq 0$ である。
- 数値的に、1000 個のランダムな三角形 $\alpha, \beta, \gamma = \alpha + e^{i\pi/3}(\beta - \alpha)$ について、三角形が反時計回りの正三角形であること、$\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma$ と二次式が（どの順序でも）0 になることを確かめ、さらにランダムな複素数に対して積の恒等式と $a^2 - 3b$ の公式が 10^{-8} 以内の誤差で成り立つことを確かめた。

よくある間違い

- 符号や向きを間違える：$e^{i\pi/3}$ は $-\omega^2$ であって ω ではない。頂点のまわりに ω（すなわち 120°）だけ回転させても正三角形は得られない。
- 三重根（triple root）の場合を忘れる：$a^2 = 3b$ だけでは $z^3 + az^2 + bz + c = (z + \frac{a}{3})^3$ の場合も許してしまい、このとき 3 つの「頂点」は一致する。

STEP のその先へ

条件 $\alpha + \omega\beta + \omega^2\gamma = 0$ は、3 つ組 (α, β, γ) の離散フーリエ変換（discrete Fourier transform）の 1 つの成分であり、z^2 の項を消す工夫は三次方程式を冪根によって解く（solving by radicals）ための第一歩で、これはガロア理論（Galois theory）へとつながる。幾何的には、この結果は、解が正三角形をなすのは導関数（derivative）$3z^2 + 2az + b$ が重心において重根（double root）をもつとき、かつそのときに限ることを述べている。これは導関数の根に関するマーデンの定理（Marden's theorem）の特別な場合である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析）は、複素数の掛け算の幾何をさらに探究するのにすばらしい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。