解答例

STEP II 1987、第 3 問

純粋数学 ・ 共役な無理数

> **STEP II 1987、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q3

鍵となる考え方

$\alpha = a + \sqrt{a^2 - b}$、$\beta = a - \sqrt{a^2 - b}$ とおく。これらは互いに共役（conjugate）である。和 $2a$ と積 b がともに整数なので、$\alpha^n + \beta^n$ はつねに整数となる。b に関する条件によって小さいほうの共役 β が 0 と 1 の間（両端を含まない）に入ることが保証されれば、β^n がまさに求める小数部分（fractional part）となり、あとはすべて自然に導かれる。

解答

以下を通して

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 - b}, \qquad \beta = a - \sqrt{a^2 - b}, \qquad \text{よって} \qquad \alpha + \beta = 2a, \quad \alpha\beta = a^2 - (a^2 - b) = b.$$

とする。

β の範囲。 まず、平方根は実数である。$b < 2a - 1$ であるから

$$a^2 - b > a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0.$$

この狭義の不等式（strict inequality）の両辺の正の平方根をとると $\sqrt{a^2 - b} > a - 1$ を得る。また $b > 0$ であるから $a^2 - b < a^2$ であり、$\sqrt{a^2 - b} < a$ である。これらを合わせると

$$a - 1 < \sqrt{a^2 - b} < a \quad \Longrightarrow \quad 0 < \beta < 1.$$

（この条件は最良である。実際、$b = 2a - 1$ ならば $\sqrt{a^2 - b} = a - 1$ となり、ちょうど $\beta = 1$ となる。）

小問 (i)

$0 < \beta < 1$ であるから、すべての正の整数 n に対して $0 < \beta^n < 1$ である。M は整数で、$0 \leq s < 1$ として $\beta^n = M + s$ であるから、M は β^n の整数部分（integer part）であり、それは 0 である。したがって

$$M = 0 \qquad \text{かつ} \qquad s = \beta^n.$$

小問 (ii)

$S_n = \alpha^n + \beta^n$ とおく。S_n が整数であることを示す。$d = \sqrt{a^2 - b}$ として、両方のべきを二項定理（binomial theorem）で展開すると

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(d^k + (-d)^k) = 2 \sum_{k\text{ が偶数}} \binom{n}{k} a^{n-k}(a^2 - b)^{k/2},$$

となる。k が奇数の項は打ち消し合うからである。残った項はどれも整数なので、$S_n \in \mathbb{Z}$ である。（同じことだが、α, β は $t^2 - 2at + b = 0$ の解なので、$S_0 = 2$、$S_1 = 2a$ として $S_n = 2aS_{n-1} - bS_{n-2}$ が成り立つ。）

したがって

$$\alpha^n = S_n - \beta^n, \qquad S_n \in \mathbb{Z}, \quad 0 < \beta^n < 1.$$

? **考えてみよう** なぜこのことから $N = S_n$ かつ $r = \beta^n$ が導かれるのだろうか。

N を整数、$0 \leq r < 1$ とする表示 $\alpha^n = N - r$ は一意的である。N は α^n 以上の最小の整数でなければならないからである。実際、$r, r' \in [0, 1)$ として $N' - r' = N - r$ ならば、$N - N' = r - r'$ は -1 と 1 の間（両端を含まない）にある整数なので 0 である。いま得た式 $S_n - \beta^n$ はこの形をしているので

$$N = S_n = \alpha^n + \beta^n, \qquad r = \beta^n = s.$$

小問 (iii)

$r = \beta^n$、$N = \alpha^n + \beta^n$、$(\alpha\beta)^n = b^n$ を用いると

$$\begin{aligned} r^2 - Nr + b^n &= \beta^{2n} - (\alpha^n + \beta^n)\beta^n + \alpha^n\beta^n \\ &= \beta^{2n} - \alpha^n\beta^n - \beta^{2n} + \alpha^n\beta^n \\ &= 0, \end{aligned}$$

となり、示すべきことが得られた。言い換えれば、r は解が α^n と β^n である方程式 $t^2 - Nt + b^n = 0$ の小さいほうの解である。

最後の小問

$a=8$、$a^2-b=63$ とすると、$b=1$ かつ $\sqrt{63}=3\sqrt{7}$ である。条件 $b<2a-1=15$ が成り立つので、$\alpha=8+3\sqrt{7}$ として以上の議論がすべて適用でき、

$$\left(8+3\sqrt{7}\right)^n = N-r, \qquad N\in\mathbb{Z},$$

となる。α^n は整数 N に r だけ足りない。$b=1$ のとき小問 (iii) から $r(N-r)=1$、すなわち

$$r=\frac{1}{N-r}=\frac{1}{\left(8+3\sqrt{7}\right)^n}=\left(8-3\sqrt{7}\right)^n.$$

特に $r\neq 0$ なので、このべきそのものが整数になることは決してなく、また $r\to 0$ である。さて、$3\sqrt{7}=\sqrt{63}$ は $\sqrt{64}=8$ よりわずかに小さいので

$$8+3\sqrt{7}\approx 16=2^4, \qquad \text{よって} \qquad r=\left(8+3\sqrt{7}\right)^{-n}\approx 16^{-n}=2^{-4n}.$$

したがって n が大きいとき、$\left(8+3\sqrt{7}\right)^n$ はある整数との差がおよそ 2^{-4n} 以内であり、その整数のすぐ下にある。

この「およそ」はどの程度正確なのだろうか。$8+3\sqrt{7}\approx 15.937$ であるから、$c=\log_2(8+3\sqrt{7})\approx 3.994$ として $r=2^{-cn}$ である。指数は $4n$ と 0.2% 以内の誤差で一致しており、これがこの評価が成り立つという意味である。比 $r/2^{-4n}=(16/(8+3\sqrt{7}))^n$ はゆっくりと増加し、$n=1$ で約 1.004、$n=10$ で 1.04 となる。

検算

- $n=1$：$8+3\sqrt{7}\approx 15.93725$ であり、これは $16-0.06275$ である。また $8-3\sqrt{7}\approx 0.06275$ であり、予想どおりである。さらに $r^2-16r+1=0$ の小さいほうの解は $8-\sqrt{63}$ である。
- $n=2$：$(8+3\sqrt{7})^2=127+48\sqrt{7}\approx 253.99606$ であるから、$N=254=S_2=2\cdot 8\cdot 16-2$ であり、$r\approx 0.003937$ である。これに対し $2^{-8}\approx 0.003906$ である。
- $b<2a-1$ を満たす数千組のランダムな (a,b) と $n\leq 7$ についてコンピュータで確かめたところ、$0<\beta^n<1$、$N-\alpha^n=\beta^n$、$r^2-Nr+b^n=0$ が確認された。また $a=8$、$b=1$、$n\leq 10$ について高精度計算で確かめたところ、$N-\alpha^n=(8-3\sqrt{7})^n$ が確認された。$n=10$ ではこれは 9.46×10^{-13} であり、$2^{-40}\approx 9.09\times 10^{-13}$ と比較できる。

よくある間違い

- $\beta < 1$ だけを示し、$\beta > 0$（これには $b > 0$ が必要）を忘れること。$M = 0$ を導くには両方が必要である。
- $N - r$ における整数部分と小数部分が一意的である理由を述べずに、$N = \alpha^n + \beta^n$ と断定すること。
- $r/2^{-4n} \to 1$ を期待すること。これは成り立たない。$8 + 3\sqrt{7}$ は 16 に近いが等しくはないので、近似が成り立つのは指数においてである。

STEP のその先へ

数 $\alpha^n + \beta^n$ はトレース（trace）の一例である。α は代数的整数（algebraic integer）であり、その共役が単位区間の内部にあるので、α のべきは指数関数的に整数に近づく。このような数はピゾ数（Pisot number）とよばれる。黄金比（golden ratio）もその一つであり、φ^n がリュカ数（Lucas number）L_n に近いのはこのためである。今回の例はペル方程式（Pell's equation）とも結びついている。$8^2 - 7 \cdot 3^2 = 1$ であるから、$(8,3)$ は $x^2 - 7y^2 = 1$ の最小の正の解である。ダヴェンポート（Davenport）の *The Higher Arithmetic*（『高等算術』）は、ペル方程式と連分数（continued fraction）を見事に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。