解答例

STEP II 1987、第 2 問

純粋数学 ・ 三角関数の恒等式

> **STEP II 1987、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q2

鍵となる考え方

この式には $\sin^2 A$、$\sin^2 B$、$\sin^2 C$ しか現れず、しかも $\sin^2 C$ についての**二次式**(quadratic)である。$A \pm B \pm C$ に関する条件は、C が $A+B$ または $A-B$ と結びついていることを意味するので、その二次式の 2 つの解（roots）が $\sin^2(A+B)$ と $\sin^2(A-B)$ であると予想するのは自然である。解と係数の関係（sum and product of the roots）を確かめればこの予想が正しいことがわかり、結果はただちに得られる。

解答

$x = \sin^2 A$、$y = \sin^2 B$、$z = \sin^2 C$ とおき、左辺を E とする。すると

$$E = x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy + 4xyz.$$

z について整理すると

$$\begin{aligned} E &= z^2 - 2z(x + y - 2xy) + (x^2 - 2xy + y^2) \\ &= z^2 - 2(x + y - 2xy)\,z + (x - y)^2. \end{aligned}$$

二次式の解

次が成り立つことを示す。

$$E = (z - \sin^2(A+B))(z - \sin^2(A-B)).$$

両辺はともに z についての最高次の係数が 1 の二次式（monic quadratic）であるから、$\sin^2(A+B)$ と $\sin^2(A-B)$ の和と積が正しい値になることを確かめれば十分である。

和。 $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$ を展開して2乗すると、足し合わせたときに交差項が打ち消し合う。

$$\begin{aligned}\sin^2(A+B) + \sin^2(A-B) &= 2\sin^2 A \cos^2 B + 2\cos^2 A \sin^2 B \\ &= 2x(1-y) + 2(1-x)y \\ &= 2(x+y-2xy).\end{aligned}$$

積。 和と差の積の公式（difference of two squares）を用いると

$$\sin(A+B)\sin(A-B) = \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B = x(1-y) - (1-x)y = x - y,$$

となるので、$\sin^2(A+B)\sin^2(A-B) = (x-y)^2$ である。

いずれも E の係数と一致するので、主張は証明された。

> **考えてみよう** $\sin^2 C$ が $\sin^2(A+B)$ または $\sin^2(A-B)$ に等しいことがわかれば十分なのはなぜか？

そうであれば z は2つの解のいずれかとなり、E の因数の一方が0になるからである。あとは、角に関する条件からまさにこのことが導かれることを示せばよい。

条件を用いる

ある整数 k と符号 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}$ に対して $A + \varepsilon_1 B + \varepsilon_2 C = k\pi$ が成り立つとする。すると

$$C = \varepsilon_2(k\pi - (A + \varepsilon_1 B)).$$

関数 $\sin^2$ は偶関数（even function）であり周期（period）π をもつので、符号 ε_2 も $k\pi$ もその値を変えない。

$$\sin^2 C = \sin^2(A + \varepsilon_1 B).$$

よって $z = \sin^2(A+B)$（$\varepsilon_1 = 1$ のとき）または $z = \sin^2(A-B)$（$\varepsilon_1 = -1$ のとき）である。いずれの場合も E の因数の一方が0となり、したがって

$$E = 0,$$

が示された。■

より簡潔な形（および逆）

各因数は正弦の2乗どうしの差であり、$\sin^2 P - \sin^2 Q = \sin(P+Q)\sin(P-Q)$ が成り立つ（上の積の公式で $A = P$、$B = Q$ としたもの）。よって

$$E = \sin(A+B+C)\,\sin(C-A-B)\,\sin(C+A-B)\,\sin(C-A+B).$$

ここに現れる 4 つの角は、符号を除けばちょうど $A+B+C$、$A+B-C$、$A-B+C$、$A-B-C$ である。これにより結果は見通しのよいものとなる。すなわち、$E=0$ となるのは、4 つの角 $A\pm B\pm C$ のいずれかが π の倍数であるとき、かつそのときに限る（if and only if）。

検算

- $A=\frac{\pi}{6}$、$B=\frac{\pi}{3}$、$C=\frac{\pi}{2}$ とすると $A+B-C=0$ である。このとき $x=\frac{1}{4}$、$y=\frac{3}{4}$、$z=1$ であり、$E=\frac{1}{16}+\frac{9}{16}+1-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{3}{8}+\frac{3}{4}=0$。
- $A=0.3$、$B=0.7$、$C=1.1$（特別な関係はない）とすると、E と 4 つの正弦の積はいずれも 0.05538 となる。したがって、条件を満たさないときこの式は確かに 0 でない。
- 10^5 組の無作為な 3 つ組による検証で、この因数分解（factorisation）が正しいこと、および $A\pm B\pm C$ のいずれかを π の倍数に固定すれば常に誤差 10^{-14} 以内で $E=0$ となることが確かめられた。

よくある間違い

- $A+B+C=\pi$（三角形）の場合しか扱わないこと。問題では 4 通りの符号の組合せのいずれも、また π の任意の倍数も許されている。$\sin^2$ が偶関数であり周期 π をもつことを使えば、それらすべてを一度に処理できる。
- 解の公式で二次方程式を解こうとして、$\sqrt{xy(1-x)(1-y)}$ の扱いに手こずること。予想した解の和と積を確かめる方法なら、平方根や符号の心配をまったくせずに済む。

STEP のその先へ

式 $x^2+y^2+z^2-2yz-2zx-2xy$ は数学のいたるところに現れる。x,y,z を a^2,b^2,c^2 に置き換えると、これは 3 辺の長さが a、b、c の三角形の面積の 2 乗の -16 倍に等しく（ヘロンの公式（Heron's formula））、また 3 つの長さが三角形をなしうるかどうかを決める、判別式（discriminant）に似た量でもある。対称式（symmetric polynomial）を 1 つの変数についての二次式とみなし、その解を予想するという手法は、代数学や不変式論（invariant theory）の全体を通じて繰り返し現れる。この種の問題をさらに解きたければ、Siklos, *Advanced Problems in Mathematics* を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。