解答例

STEP II 1987、第 16 問

確率・統計 ・ ベイズの定理

> **STEP II 1987、問 16**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q16

鍵となる考え方

これは最も素朴な形のベイズの定理（Bayes' theorem）である。2 人がともに「はい」と答える状況は 2 通りの経緯で生じうる。主張が正しく 2 人とも本当のことを言っている場合と、主張が誤りで 2 人とも嘘をついている場合である。それぞれの経緯に、その事前確率（prior probability）とその答えの組が得られる確率とを掛けて重みをつけ、全体のうち「正しい」経緯から来る割合がどれだけかを問う。後半も同じように進む。新しい点はただ一つ、友人たちの答えは A についてのみ何かを語っているので、3 つの可能性を A が冷蔵庫の中にあるかどうかで分類しなければならない、ということである。

解答

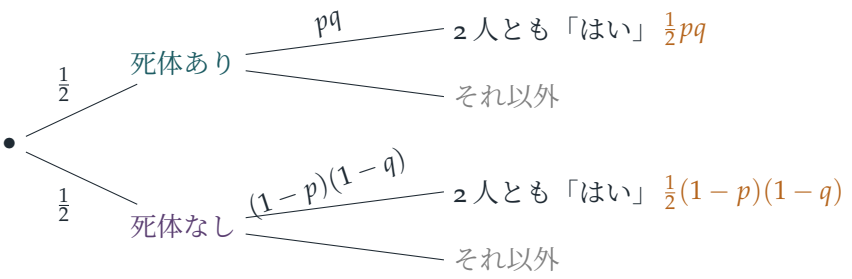
1 つ目の見積もり

冷蔵庫の中に死体があるという事象を F とし、P と Q の 2 人ともが死体があると言う事象を Y とする。今朝の時点では $\Pr(F) = \Pr(F') = \frac{1}{2}$ である。

各友人は「はい／いいえ」で答える質問に答えるものとしてモデル化する。本当のことを言うとは正しい答えを返すことであり、嘘をつくとは誤った答えを返すことである。友人が正直かどうかは冷蔵庫の中身によらず、P と Q は独立（independent）に振る舞う。したがって次が成り立つ。

- 死体がある場合、2 人とも「はい」と言うのはちょうど 2 人とも本当のことを言うときであるから、$\Pr(Y \mid F) = pq$ である。

▶ 死体がない場合、2 人とも「はい」と言うのはちょうど 2 人とも嘘をつくときであるから、$\Pr(Y \mid F') = (1-p)(1-q)$ である。



条件付き確率（conditional probability）の定義（ベイズの定理）により、

$$\Pr(F \mid Y) = \frac{\Pr(F)\Pr(Y \mid F)}{\Pr(F)\Pr(Y \mid F) + \Pr(F')\Pr(Y \mid F')} = \frac{\frac{1}{2}pq}{\frac{1}{2}pq + \frac{1}{2}(1-p)(1-q)}$$
$$= \frac{pq}{pq + 1 - p - q + pq} = \frac{pq}{1 - p - q + 2pq},$$

となり、これが求める見積もりである。事前確率が五分五分であったため、$\frac{1}{2}$ の因子は約分されて消える。

考えてみよう 答えが単に pq、すなわち 2 人とも本当のことを言っている確率にならないのはなぜか。

すでに分かっていることがあるからである。すなわち、2 人の答えは一致した。2 人のうちちょうど 1 人が嘘をつく結果は、一方が「はい」、他方が「いいえ」となるので、もはや起こりえない。残ったものの上で確率を比例配分し直さなければならない。生き残った 2 つの経緯のうち、「2 人とも正直」の重みは pq、「2 人とも嘘」の重みは $(1-p)(1-q)$ である。これらの和で割ることが、まさにその配分し直しにあたる。（事前確率の $\frac{1}{2}$ も役割を果たしている。事前確率が偏っていれば、約分されて消えることはない。）

2 つ目の見積もり

今度は死体が確実にある。同様に確からしい 3 つの可能性は、それぞれ事前確率 $\frac{1}{3}$ をもち、

$$A \text{ のみ}, \qquad B \text{ のみ}, \qquad A \text{ と } B \text{ の両方}.$$

である。2 人の友人がともに A が冷蔵庫の中にあると言う事象を Y_A とする。前と同じモデルにより、2 人の答えは A があるかどうかだけで決まる。

▶「A のみ」と「両方」の場合は A が冷蔵庫の中にあるので、どちらでも $\Pr(Y_A) = pq$ である。

▶「B のみ」の場合は A はないので、$\Pr(Y_A) = (1-p)(1-q)$ である。

よって

$$\begin{aligned}\Pr(\text{両方} \mid Y_A) &= \frac{\frac{1}{3}pq}{\frac{1}{3}pq + \frac{1}{3}(1-p)(1-q) + \frac{1}{3}pq} \\ &= \frac{pq}{2pq + 1 - p - q + pq} = \frac{pq}{1 - p - q + 3pq}.\end{aligned}$$

2 人の報告は B について直接には何も教えてくれないことに注意しよう。その効果は A がある確率を変えることだけである。前半の結果（事前確率を $\frac{1}{2}$ の代わりに $\frac{2}{3}$ としたもの）により、その確率は $2pq/(1-p-q+3pq)$ となる。A があるという条件のもとでは「A のみ」と「両方」は依然として同様に確からしいので、これを半分にする。こうしても同じ答えが得られる。

検算

- $p = q = \frac{1}{2}$ ならば友人たちは何の役にも立たず、答えは事前確率に戻る：$\frac{1}{4}/\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ および $\frac{1}{4}/\frac{3}{4} = \frac{1}{3}$。
- $p = q = 1$ ならば友人たちは決して誤らず、答えは 1（死体はある）と $\frac{1}{2}$（A はあるので、B もあるかどうかは五分五分）になる。
- $p = q = \frac{3}{4}$ のとき、答えは $\frac{9}{10}$ と $\frac{9}{19}$ である。状態と正直さのあらゆる組合せを厳密に数え上げた結果は、ランダムに選んだ 200 組の (p, q) について一致する。$p = 0.7$、$q = 0.6$ として 4×10^5 回の試行のシミュレーションを行うと、後半について 0.4375 が得られ、$\frac{0.42}{0.96} = 0.4375$ と一致した。

よくある間違い

- 「2 人とも嘘」の場合にも 2 つの「はい」が生じることを忘れて、pq と答えてしまう。
- 後半で、分子に「両方」の場合だけを置くのはよいが、分母から「A のみ」の場合を落としてしまう。どちらの場合も A があることと矛盾しない。

STEP のその先へ

これはベイズ更新（Bayesian updating）である。事前の信念に証拠の**尤度**（likelihood）を掛け、それから正規化（normalise）する。これをすっきり書くにはオッズ（odds）の形を用いるとよい。事後オッズ（posterior odds）は、事前オッズに尤度比（likelihood ratio）$\frac{pq}{(1-p)(1-q)}$ を掛けたものに等しい。こう書くと、独立な証人たちはそれぞれの比

を単に掛け合わせればよいことが明らかになる。同じ計算が、医療検査、迷惑メールフィルタ、法廷での証拠の組み合わせの根底にある。Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）には条件付き確率についての優れた章があり、まさにこの種のパズルが数多く収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。