解答例

STEP II 1987、第 15 問

確率・統計 ・ 幾何的確率

> **STEP II 1987、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q15

鍵となる考え方

位置のことは忘れて、**時刻**で考える。それぞれの車両は踏切をある時間区間（interval）のあいだ占有しており、衝突（collision）が起こるのはちょうど二つの区間が重なるときである。この重なりを二つの不等式で書き表すと、(u_1, u_2) 平面における衝突領域は、原点を通る 2 直線にはさまれたくさび形（wedge）になる。u_1, u_2 が $(0, V)$ 上の一様分布（uniform distribution）に従うとき、点 (u_1, u_2) は正方形上に一様に分布するので、求める確率（probability）は正方形のうちくさび形の内部にある部分の割合にほかならない。そして三つの場合分けは、2 直線が正方形のどこから出ていくかに対応している。

解答

衝突の条件

列車とトラックは、それぞれ一定の速さ $u_1, u_2 > 0$ で、1 点で交わる直線道路上を進むものとしてモデル化する（踏切の幅は無視するか、車両の長さに含めて考える）。衝突が起こるのは、それぞれの車両のどこかの部分が同じ瞬間に踏切上にあるとき、かつそのときに限る。

列車の先頭は時刻 d_1/u_1 に踏切に達し、最後尾は時刻 $(d_1 + l_1)/u_1$ に通過するので、列車が踏切を占有するのは

$$\frac{d_1}{u_1} < t < \frac{d_1 + l_1}{u_1}.$$

のときである。同様に、トラックが踏切を占有するのは $d_2/u_2 < t < (d_2 + l_2)/u_2$ のときである。二つの開区間 (a_1, b_1) と (a_2, b_2) が重なるのは、ちょうど一方が他方の終

わる前に始まるとき、すなわち $a_1 < b_2$ かつ $a_2 < b_1$ のときである。よって衝突が起こるのは

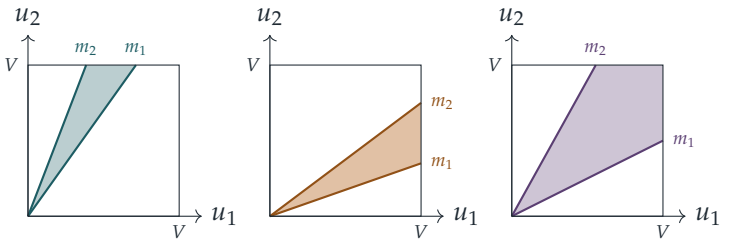
$$\frac{d_1}{u_1} < \frac{d_2 + l_2}{u_2} \quad \text{かつ} \quad \frac{d_2}{u_2} < \frac{d_1 + l_1}{u_1}.$$

のとき、かつそのときに限る。両辺に正の量 $u_1 u_2$ を掛けて整理すると、これは

$$\boxed{\frac{d_2}{d_1 + l_1} u_1 \ < \ u_2 \ < \ \frac{d_2 + l_2}{d_1} u_1.}$$

となる。(不等式が等号で成り立つ場合、車両は先頭と最後尾が接するだけである。これは確率 0 の事象なので、衝突に数えるかどうかは問題にならない。)

$m_1 = \dfrac{d_2}{d_1 + l_1}$、$m_2 = \dfrac{d_2 + l_2}{d_1}$ とおく。$d_2 < d_2 + l_2$ かつ $d_1 + l_1 > d_1$ であるから $m_1 < m_2$ であり、衝突領域は第 1 象限において直線 $y = m_1 x$ と $y = m_2 x$ にはさまれたくさび形である。下の図は、次に必要となる正方形 $0 < x, y < V$ の内部で、この領域を網かけで示したものである。



(A) $d_1 + l_1 \le d_2$　(B) $d_2 + l_2 \le d_1$　(C) それ以外

列車の最後尾がトラックの先頭より近い場合の確率

u_1 と u_2 は独立 (independent) で、それぞれ $(0, V)$ 上の一様分布に従うので、組 (u_1, u_2) は正方形 $(0, V)^2$ 上で一定の同時確率密度 (joint density) $1/V^2$ をもつ。よって衝突の確率は

$$\frac{\text{正方形内のくさび形の面積}}{V^2}.$$

である。

考えてみよう 2 直線は、それぞれ正方形のどの辺から出ていくか。

直線 $y = mx$ は、$m \ge 1$ ならば上の辺から (点 $(V/m,\ V)$ で)、$m \le 1$ ならば右の辺から (点 $(V,\ mV)$ で) 正方形を出る。この場合は $d_1 + l_1 < d_2$ であるから $m_1 = d_2/(d_1 + l_1) > 1$ であり、したがって $m_2 > m_1 > 1$ も成り立つ。図 (A) のように、2 直線はどちらも上の辺から出ていく。

このとき正方形内のくさび形は、$(0,0)$、$(V/m_2, V)$、$(V/m_1, V)$ を頂点とする三角形

である。上の辺に沿った底辺の長さは $V/m_1 - V/m_2$、高さは V であるから、

$$\mathrm{P}(\text{衝突}) = \frac{1}{V^2}\cdot\frac{1}{2}V\left(\frac{V}{m_1}-\frac{V}{m_2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{d_1+l_1}{d_2}-\frac{d_1}{d_2+l_2}\right)$$
$$= \frac{(d_1+l_1)(d_2+l_2)-d_1d_2}{2d_2(d_2+l_2)} = \frac{l_1l_2+l_2d_1+l_1d_2}{2d_2(l_2+d_2)},$$

となる。ここで d_1d_2 の項は打ち消し合う。これが求める結果である。

残りの二つの場合

トラックの最後尾が列車の先頭より近い場合、 $d_2+l_2 < d_1$。このとき $m_2 = (d_2+l_2)/d_1 < 1$ であるから $m_1 < m_2 < 1$ であり、図 (B) のように 2 直線はどちらも右の辺から出ていく。くさび形は $(0,0)$、(V, m_1V)、(V, m_2V) を頂点とする三角形で、辺 $x = V$ 上の底辺は $(m_2-m_1)V$、高さは V である。よって

$$\mathrm{P}(\text{衝突}) = \frac{1}{2}(m_2-m_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{d_2+l_2}{d_1}-\frac{d_2}{d_1+l_1}\right) = \frac{l_1l_2+l_1d_2+l_2d_1}{2d_1(l_1+d_1)}.$$

これは最初の答えで列車とトラックの役割を入れ替えた（$l_1 \leftrightarrow l_2$、$d_1 \leftrightarrow d_2$）ものであり、そうなるべきである。車両を入れ替えることは、図を直線 $y = x$ に関して折り返すことにあたるからである。

どちらの車両も他方より完全に手前にはない場合、 $d_2 \le d_1+l_1$ **かつ** $d_1 \le d_2+l_2$。このとき $m_1 \le 1 \le m_2$ であるから、図 (C) のように直線 $y = m_1x$ は右の辺から、$y = m_2x$ は上の辺から出ていく。正方形から衝突しない二つの三角形を引くのがいちばん簡単である。$y = m_1x$ の下側の三角形の面積は $\frac{1}{2}V\cdot m_1V$、$y = m_2x$ の左側（この直線と u_2 軸の間）の三角形の面積は $\frac{1}{2}V\cdot V/m_2$ である。したがって

$$\mathrm{P}(\text{衝突}) = 1-\frac{m_1}{2}-\frac{1}{2m_2} = 1-\frac{d_2}{2(d_1+l_1)}-\frac{d_1}{2(d_2+l_2)}.$$

場合の境目では答えが一致する。$d_2 = d_1+l_1$（すなわち $m_1 = 1$）では、1 番目と 3 番目の式はどちらも $\frac{1}{2}-\frac{d_1}{2(d_2+l_2)}$ を与え、$d_1 = d_2+l_2$ でも同様である。どの確率も V によらないことに注意しよう。両方の速さを同じ倍率で変えても、車両が衝突するかどうかは変わらないからである。

検算

- $l_1 = 1$、$l_2 = 2$、$d_1 = 1$、$d_2 = 5$（場合 A）のとき、公式は $\frac{9}{70} \approx 0.1286$ を与える。速さの組を無作為に 4×10^5 組生成したシミュレーションでは 0.1283 となった。場合 B と場合 C のシミュレーション（たとえば $l_1 = l_2 = 1$、$d_1 = 1$、$d_2 = 1.5$ で、値は 0.425）も誤差 0.002 以内で一致した。

- 場合 A で $l_1, l_2 \to 0$ とすると確率は 0 になる。2 点が踏切で出会うのは、ちょうど $u_2/u_1 = d_2/d_1$ のときに限るからである。
- 場合 C で $d_1 = d_2$ とし車両を非常に長くすると、$m_1 \to 0$、$m_2 \to \infty$ となるので確率は 1 に近づく。これは妥当である。

よくある間違い

- 「トラックが踏切を通過し終える前に列車が到着する」のように、不等式を一つしか書かないこと。二つの区間が重なるには**両方**の条件が必要である。
- 領域が四角形である場合 C で、三角形の公式を使ってしまうこと。まず、それぞれの直線が正方形のどこから出ていくかを確かめよう。

STEP のその先へ

ここで用いた方法、すなわち独立な一様確率変数に関する確率を面積に置き換える方法は幾何的確率（geometric probability）と呼ばれ、$\mathrm{P}((X, Y) \in A)$ を同時確率密度の重積分（double integral）として計算する最も簡単な例である。同じ考え方は、ビュフォン（Buffon）の針の問題や、無作為な時刻に到着する 2 人の「出会いの問題」といった古典的な問題の根底にもある。Grimmett と Welsh による *Probability: An Introduction*（確率論入門）では、同時確率密度とこのような使い方が展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。