解答例

STEP II 1987、第 14 問

力学 ・ 円錐上のゴムひも

> **STEP II 1987、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q14

鍵となる考え方

輪ゴムは円錐上で常に水平な円であり続けるので、その状態はただ一つの数、すなわち母線（generator）に沿って測った頂点（vertex）からの距離 s によって完全に記述される。そこで、輪ゴムの微小な要素一つの運動を追う。張力（tension）による内向きの引く力は、円錐面に沿った成分と面に垂直な成分に分けられる。面に沿った成分が要素を母線に沿って動かし、面に垂直な成分はなめらかな円錐によって打ち消される。s を長さ x に書き換えると単振動（simple harmonic motion）が得られ、輪ゴムは 4 分の 1 周期（period）の後にたるむ。

解答

モデル化。 輪ゴムを、質量 m が円周上に一様に分布した細い弾性ひも（elastic string）とみなす。円錐はなめらかなので、各要素に及ぼす円錐からの抗力は面に垂直であり、重力は無視する。対称性により、すべての要素は同じように運動するので、輪ゴムは軸を中心とする円のままである。母線に沿って測った頂点からの距離を $s(t)$ とする。各母線は軸と角 α をなすので、円の半径は $s\sin\alpha$ であり、したがって

$$x = 2\pi s \sin\alpha.$$

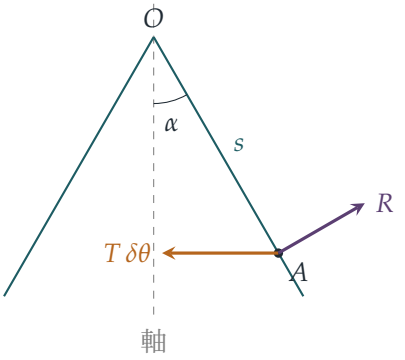
輪ゴムが伸びている間（$x > l$）は、フックの法則（Hooke's law）により張力は $T = \dfrac{\lambda(x-l)}{l}$ である。

一つの要素にはたらく力。 軸に対して中心角 $\delta\theta$ を張る要素をとる。これは輪ゴム全体の $\delta\theta/2\pi$ にあたるので、その質量は $\dfrac{m\,\delta\theta}{2\pi}$ である。この要素には次の二つの力がは

たらく。

- 張力による、問題で与えられた力 $T\,\delta\theta$。これは軸に垂直で、軸に向かう向きである。
- 円錐からの垂直抗力（normal reaction）R。これは要素を通る母線に垂直である。

図は、軸と要素を含む平面を示している。



要素は円錐面上に拘束されているので、母線 OA に沿ってしか動けない。そこで、力をこの方向とそれに垂直な方向に分解する。力 $T\,\delta\theta$ は軸に垂直であり、母線は軸と角 α をなすので、$T\,\delta\theta$ と $\overrightarrow{AO}$ の向きのなす角は $90^\circ - \alpha$ である。よって次が成り立つ。

- $\overrightarrow{AO}$ の向き（頂点に向かう向き）では、$T\,\delta\theta$ の成分は $T\,\delta\theta\cos(90^\circ - \alpha) = T\,\delta\theta\sin\alpha$ であり、R の寄与はない。
- 面に垂直な向きには運動がないので、$R = T\,\delta\theta\cos\alpha$ である。

$R \geq 0$ であるから、輪ゴムは確かに円錐に押しつけられたままである。

> **考えてみよう** 内向きの力 $T\,\delta\theta$ によって半径が縮む、と単純に言えないのはなぜか？

要素は軸に向かってまっすぐ動くことはできない。円錐が邪魔をしているからである。$T\,\delta\theta$ のうち、加速に寄与するのは面に沿った部分だけであり、残りは抗力によって打ち消される。これが因子 $\sin\alpha$ の由来であり、なめらかな斜面上の小球が斜面に沿って $mg\sin\theta$ の力しか受けないのと同じ理由である。

運動方程式。 s が頂点から離れる向きに増加するようにとり、母線に沿った向きに要素についてのニュートン（Newton）の運動の第 2 法則（Newton's second law）を適用すると、

$$\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -T\,\delta\theta\sin\alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{2\pi T\sin\alpha}{m}.$$

$\delta\theta$ が約分されるので、すべての要素が同じ方程式に従う。これにより、輪ゴムが円のままであることが確かめられる。さて、α は定数で $x = 2\pi s \sin\alpha$ であるから、

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = 2\pi \sin\alpha \frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{4\pi^2 T \sin^2\alpha}{m} = -\frac{4\pi^2\lambda}{ml}(x-l)\sin^2\alpha,$$

ここで $T = \lambda(x-l)/l$ を用いた。これは輪ゴムが張っている間、すなわち $0 < t < t_0$ において成り立ち、整理すると求める方程式が得られる。 □

t_0 を求める。 $y = x - l$、$\omega^2 = \dfrac{4\pi^2\lambda\sin^2\alpha}{ml}$ とおくと $\ddot{y} = -\omega^2 y$ となり、これは $y = 0$ を中心とする単振動である。初めの長さを $x_0 > l$ とする（輪ゴムは押し込まれたので、伸びた状態から始まる）。輪ゴムは静止状態から放されるので $\dot{y}(0) = 0$ であり、

$$x - l = (x_0 - l)\cos\omega t.$$

輪ゴムがたるむのは x が初めて l まで減少したとき、すなわち初めて $\cos\omega t = 0$ となるときであるから、$\omega t_0 = \frac{\pi}{2}$ である。$\omega = 2\pi\sin\alpha\sqrt{\lambda/(ml)}$ であるから、

$$t_0 = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{1}{4\sin\alpha}\sqrt{\frac{ml}{\lambda}}.$$

t_0 が輪ゴムをどれだけ伸ばしたかによらないことに注意しよう。これは単振動に典型的な性質であり、4 分の 1 周期は振幅（amplitude）によらず一定である。

検算

- **単位：**λ は力であるから、ml/λ の単位は $\mathrm{kg\,m/N} = \mathrm{s}^2$ であり、t_0 は時間の単位をもつ。
- **極限の場合：**$\alpha \to \frac{\pi}{2}$ とすると円錐は平面につぶれ、輪ゴムは中心に向かって直接縮み、$t_0 = \frac{1}{4}\sqrt{ml/\lambda}$ となる。$\alpha \to 0$ とすると円錐は円柱となり、張力は面に沿った成分をもたなくなるので、当然 $t_0 \to \infty$ となる。
- **数値計算：**$\alpha = 30°$、$m = 1$、$l = 1$、$\lambda = 4$ のとき、公式から $t_0 = \frac{1}{4}$ が得られる。要素の運動方程式を数値的に時間発展させると（また、細かい多角形で近似した輪ゴムにはたらく張力の合力を 3 次元で直接計算しても）、パラメータを無作為に選んだ場合について、因子 $\sin\alpha$ と t_0 の両方が小数点以下何桁にもわたって再現される。

よくある間違い

- 円錐からの抗力を忘れ、半径 r について $\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}\ddot{r} = -T\,\delta\theta$ と書いてしまう。これでは因子 $\sin^2\alpha$ がまるごと抜け落ちる。

- 要素の質量として $\frac{m\,\delta\theta}{2\pi}$ ではなく m を用いてしまう。
- t_0 として 1 周期全体、あるいは半周期を答えてしまう。輪ゴムは最大の伸びの状態から始まるので、自然長（natural length）に達するのは 4 分の 1 周期後である。

STEP のその先へ

与えられた力 $T\,\delta\theta$ は、一般的な事実の微小角版である。すなわち、張力 T がかかり曲率半径（radius of curvature）ρ で曲がっているひもは、単位長さあたり T/ρ の力で横向きに押す。同じ考え方を曲面に拡張すると、シャボン玉の内部の圧力が外部の圧力より大きい理由が説明できる（ラプラス（Laplace）の法則（Laplace's law））。曲面上に拘束された運動は、ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）を用いると最もすっきりと扱える。そこでは抗力をまったく登場させる必要がない。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）には、張力のかかったひもや拘束運動に関する問題が数多く収められている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。