解答例

STEP II 1987、第 13 問

力学 ・ 壁との斜め衝突

> **STEP II 1987、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q13

鍵となる考え方

なめらかな（smooth）クッションが変えられるのは、速度のうちクッションに垂直な成分だけである。その成分は向きが反転して e 倍され、クッションに沿った成分は変わらない。隣り合う 2 つのクッションはそれぞれ異なる成分に作用するので、各成分はちょうど 1 回ずつ反転して e 倍される。閉じた経路については、座標を用いてパックをクッションからクッションへと追跡し、唯一の自由な量である初めの傾きを、パックが出発点に戻ってくるように選ぶ。

解答

モデル。パックはなめらかなクッションをもつなめらかな水平の台の上を滑る質点であるから、衝突と衝突の間には何も作用せず、一定の速度で直線運動をする。衝突の際、クッションの力積（impulse）はクッションに垂直である（クッションはなめらかだからである）。したがって速度の平行成分は変わらない。ニュートン（Newton）の反発の法則（law of restitution）により、垂直成分は向きが反転して e 倍される。$0 < e \leq 1$ とする。

台の 2 辺に沿って座標軸をとり、台が $0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq B$ となるようにする。

小問 (i)：隣り合う 2 つのクッション

パックの速度を (u, v) とする。隣り合うクッションとは、$x =$ 定数 の形のクッション 1 つと $y =$ 定数 の形のクッション 1 つであり、どちらの順に当たってもよい。x クッションに当たると $(u, v) \mapsto (-eu, v)$ となり、y クッションに当たると $(u, v) \mapsto (u, -ev)$

となる。それぞれに 1 回ずつ当たった後の速度は、順序によらず

$$(-eu,\,-ev) = -e\,(u,v).$$

である。これはもとの速度のスカラー倍であるから、最後の経路はもとの経路に平行であり、題意が示された。パックは今や逆向きに進んでおり、その速さは e 倍に減っている。

小問 (ii)：クッションから出発する閉じた経路

パックがクッション $y=0$ 上の点 $P=(a,0)$ に静止していて、$a:(L-a)=z:1$ であるとする。すなわち

$$a=\frac{zL}{1+z},\qquad L-a=\frac{L}{1+z},\qquad 0<a<L.$$

である。x を右向き、y を上向きにとって台を上から見ると、クッション $y=0$ から時計回りに進んで、$x=0$、次に $y=B$、次に $x=L$ に出会う。比を反対側の端から測る場合は z を $1/z$ に置き換えればよく、議論は変わらない。パックを速度 $(-u,v)$（ただし $u,v>0$）で打ち出し、傾きを $k=v/u$ と書く。4 本の区間での速度は

$$(-u,v)\xrightarrow{x=0}(eu,v)\xrightarrow{y=B}(eu,-ev)\xrightarrow{x=L}(-e^2u,-ev)\xrightarrow{y=0}\cdots$$

である。

- 区間 1、$(a,0)$ から $x=0$ まで：水平距離 a を進み、ak だけ上昇するので、左のクッションに $W_1=(0,\,ak)$ で当たる。
- 区間 2、傾きは $v/(eu)=k/e$：$B-ak$ だけ上昇するので、横に $e(B-ak)/k$ だけ進む。上のクッションに $W_2=\big(e(B/k-a),\,B\big)$ で当たる。
- 区間 3、傾きは $-k$：横に $L-x_{W_2}$ だけ進み、$k(L-x_{W_2})$ だけ下降するので、右のクッションに高さ $y_{W_3}=B-kL+e(B-ak)$ で当たる。
- 区間 4、傾きは k/e：y_{W_3} だけ下降し、$e\,y_{W_3}/k$ だけ戻るので、$y=0$ に

  $$x_{終}=L-\frac{e\,y_{W_3}}{k}=(1+e)L+e^2a-\frac{e(1+e)B}{k}.$$

  で到達する。

$x_{終}=a$ となってほしい。これより $e(1+e)B/k=(1+e)L-(1-e^2)a=(1+e)\big(L-(1-e)a\big)$ となるので

$$k=\frac{eB}{L-(1-e)a}=\frac{B}{L}\cdot\frac{e(1+z)}{1+ez}.$$

である。$L-(1-e)a>L-a>0$ であるから、これはすべての $z>0$ に対して正の数である。

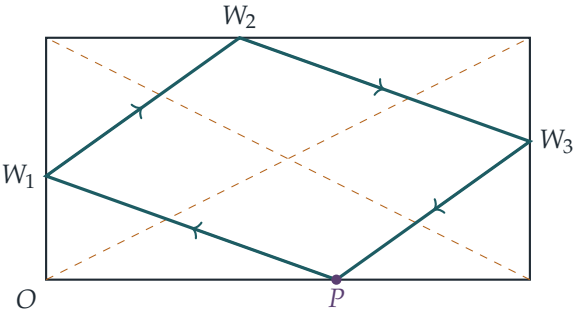
考えてみよう これで終わりだろうか。パックが左、上、右、下の順にクッションに当たると仮定していた。

終わりではない。各衝突点が本当に仮定した辺の上にあることを確かめなければならない。$D = L - (1-e)a = L - a + ea$ とおくと $k = eB/D$ である。このとき

$$y_{W_1} = ak = \frac{eaB}{D},$$
$$x_{W_2} = e\left(\frac{D}{e} - a\right) = L - a,$$
$$y_{W_3} = B(1+e) - k(L+ea) = \frac{B\left[(1+e)(L-a+ea) - eL - e^2a\right]}{D} = \frac{B(L-a)}{D}.$$

である。$0 < a < L$ かつ $e > 0$ であるから、$0 < ea < D$ かつ $0 < L - a < D$ である。よって $0 < y_{W_1} < B, 0 < x_{W_2} < L, 0 < y_{W_3} < B$ が成り立つ。各衝突は仮定した辺の内部（端点を除く部分）で起こり、角には当たらない。したがって、すべての z について、上で求めた傾き k の打球は左、上、右と進み、P に戻ってくる。

小問 (i) により、区間 1 と区間 3 は平行であり、区間 2 と区間 4 も平行である。よって閉じた経路は台に内接する平行四辺形（parallelogram）$PW_1W_2W_3$ である。



破線は対角線である。図の経路は $L = 2B, e = \frac{1}{2}, z = 1.5$ の場合である。

小問 (iii)：任意の内部の点からの 2 つの打球

そのような打球はすべて小問 (*ii*) の経路のいずれかである。パックが内部の点 Q から速度 $\mathbf{w}$ で出発し、4 つのクッション上の点 V_1, V_2, V_3, V_4 で時計回りの順に跳ね返って Q に戻ってくるとする。小問 (i) を 2 回適用すると、4 回跳ね返った後の速度は $(-e)^2\mathbf{w} = e^2\mathbf{w}$ となり、もとと同じ向きを向く。したがって最後の区間 V_4Q と最初の区間 QV_1 は同じ直線上にあり、向きも同じである。よって $V_4 \to Q \to V_1$ は 1 本のまっすぐな区間であり、パックの経路は、クッション上の V_4 から出発し、残りの 3 つのクッションで時計回りに跳ね返って V_4 に戻る閉じた経路である。小問 (ii) の計算は、

そのような経路の傾きが出発点によって決まることを示している。そのような経路はどれも各辺に頂点を 1 つずつもつので、すべて小問 (ii) の平行四辺形 Π_a（$0 < a < L$）であり、Q は Π_a の辺の上にある。逆に、Q がある Π_a の辺の上にあれば、Q からその辺に沿って進行方向に打てばよい。したがって、Q を通る（平行四辺形、辺）の組の個数を数えればよい。

z が変化するとき辺が台をどのように掃くか。 z が 0 から ∞ まで動くと、a は 0 から L まで動く。上の式から、y_{W_1} は 0 から B まで増加し、$x_{W_2} = L - a$ は L から 0 まで減少し、$y_{W_3} = B/\big(1 + ea/(L-a)\big)$ は B から 0 まで減少する。よって Π_a は O を通る対角線として始まり（$a \to 0$ のとき頂点は角 O と (L, B) に集まる）、もう一方の対角線として終わる。ここで 1 本の辺、たとえば PW_1 に注目する。この辺は、角 O において、底辺に沿った長さ a と左辺に沿った長さ y_{W_1} を 2 辺とする三角形を切り取る。この 2 辺はどちらも a について狭義単調増加であるから、これらの三角形は真に入れ子になっており、その斜辺どうしは決して交わらない。三角形は何もない状態から、$(L, 0)$ と $(0, B)$ を結ぶ対角線より下の、台の半分まで連続的に大きくなる。正確に述べると、$Q = (q_1, q_2)$ がその半分の中にあれば、関数

$$f(a) = \frac{q_1}{a} + \frac{q_2}{y_{W_1}(a)}$$

は連続かつ狭義単調減少である。$a \to 0$ のとき ∞ に発散し、$a \to L$ のとき $q_1/L + q_2/B < 1$ に収束（converge）するので、$f(a) = 1$（Q が PW_1 上にあることを意味する）となる a はちょうど 1 つ存在する。Q がその半分の中になければ、すべての a に対して $f(a) > 1$ であり、PW_1 が Q を通ることはない。同じ議論が各辺に当てはまる。

- PW_1 は、$(L, 0)$ と $(0, B)$ を結ぶ対角線より下の台の半分を 1 回掃く。
- W_2W_3 は、その対角線より上の台の半分を 1 回掃く。
- W_1W_2 は、O と (L, B) を結ぶ対角線より上の台の半分を 1 回掃く。
- W_3P は、その対角線より下の台の半分を 1 回掃く。

クッションから離れていて対角線上にない点 Q は、各対角線に関してちょうど一方の側にある。よって、異なる 2 つの平行四辺形に属するちょうど 2 本の辺が Q を通る。これが 2 つの打球である。それぞれの打球はパックをその辺に沿って送り出し、4 つのクッションを時計回りに回って Q に戻らせる。（Q が対角線上にある場合は、2 つの打球のうち 1 つが角に向かう打球に退化する。）

検算

- $e = 1$ のとき、傾きはすべての z に対して $k = B/L$ であるから、すべての辺は対角線に平行である。これは完全弾性のクッションに対して通常の鏡像による展開が与

える結果と一致する。

- $L = 2, B = 1, e = \frac{1}{2}, z = 1$ とすると、$a = 1, k = \frac{1}{3}$ であり、衝突点は $(0, \frac{1}{3})$, $(1, 1)$, $(2, \frac{2}{3})$ である。最後の区間では $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y = e/k = \frac{3}{2}$ であるから、$\frac{2}{3}$ 下降する間に 1 だけ戻り、$(1, 0) = P$ に到達する。
- パックを壁から壁へと進める数値シミュレーションで、3 つの小問すべてが成り立つことを確かめた。ランダムな台、e の値、z の値に対して予測どおりの衝突点が得られ、ランダムな内部の点はそれぞれ閉じた経路のちょうど 2 つの上にあった。

よくある間違い

- 鏡像（展開）のテクニックを使うこと：$e < 1$ のとき反射角は入射角に等しくないので、このテクニックは使えない。
- $x_{終} = a$ から k を求め、各衝突が意図した辺の上で起こることを確かめないこと。
- 小問 (iii) で、Q からの打球が特定の辺に沿って出発しなければならないと仮定すること。最初の区間と最後の区間を 1 本のまっすぐな区間につなげるのは、小問 (i) の議論である。

STEP のその先へ

このような経路は**ビリヤード**（billiards）と呼ばれる。$e = 1$ の場合はそれだけで一つの分野をなしており、反射や展開を用いて研究され、力学系（dynamical systems）へとつながっていく。ここではクッションがエネルギーを失い、写像「1 周する前の速度 $\mapsto$ 1 周した後の速度」は e^2 倍という純粋な拡大縮小になる。パックが 1 周ごとに遅くなるにもかかわらず、すべての e に対して閉軌道が存在するのはこのためである。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、力積と反発を丁寧に扱っている。Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（数学の発展問題集）には、同じ趣向の問題がさらに収録されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。