解答例

STEP II 1987、第 12 問

力学 ・ つり合いとエネルギー

> **STEP II 1987、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q12

鍵となる考え方

「あらゆる位置で平衡（equilibrium）にある」というのは、位置エネルギー（potential energy）についての主張である。ビーズ（bead）が針金上のどこでも静止できるなら、ビーズが針金に沿って滑っても系の位置エネルギーは変化しえない。したがって、位置エネルギーは針金上で一定でなければならない。このエネルギーをビーズの高さと輪からの距離で表せば、曲線がただちに得られる。後半も同じ事実によってすっきりと解ける。位置エネルギーが一定なので、エネルギー保存則（conservation of energy）により、ビーズと質点の運動エネルギー（kinetic energy）の和は一定である。あとは二つの速さを結びつける幾何的な関係を求めるだけである。

解答

ビーズとつり下げられたおもりを質点とみなし、糸は軽くて伸びないもの、輪と針金はなめらかなものとしてモデル化する。輪を原点 O に置き、y を鉛直上向きにとる。ビーズの位置を極座標（polar coordinates）(r,θ) で表し、θ は水平方向から反時計回りに測るものとする。このとき、ビーズの O に対する高さは $y = r\sin\theta$ である。糸の長さを L とする。

曲線の方程式

O からビーズまでの糸の長さは r なので、つり下げられた質点は輪から距離 $L-r$ だけ下にある。O を基準の高さとすると、系の位置エネルギーは

$$V = mgr\sin\theta - mg(L-r) = mg\left(r + r\sin\theta\right) - mgL.$$

である。針金はなめらかなので、ビーズに働く針金からの抗力は針金に垂直であり、系を針金に沿って動かしうる力はすべて V に由来する。系がある位置で平衡にあるのは、そこで V が針金に沿った移動に関して停留するとき、かつそのときに限る。**あらゆる**位置で平衡にあるということは、針金上のいたるところで $\mathrm{d}V/\mathrm{d}s = 0$（$s$ は弧長（arc length））ということであり、したがって V は針金上で一定である：

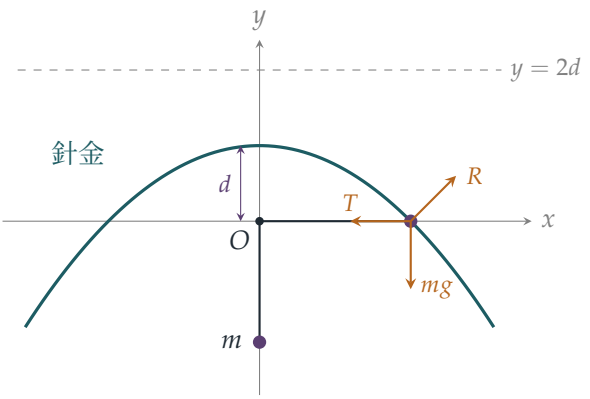
$$r(1+\sin\theta) = c \quad \text{ある定数} c.$$

これは力のつり合いからも確かめられる。平衡状態では、つり下げられた質点によって糸全体に張力（tension）mg が働く（輪はなめらかである）。ビーズについて、O に向かう張力 mg の接線成分は $-mg\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}s}$ であり、重力の接線成分は $-mg\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$ である。これらが打ち消し合わなければならないので $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(r+y) = 0$ となり、これは先ほどと同じ条件である。

c を求める。$1+\sin\theta \le 2$ より $r = c/(1+\sin\theta) \ge c/2$ であり、等号は $\theta = \frac{\pi}{2}$（輪の真上にある針金上の点）のときに成り立つ。よって輪から針金までの最短距離は $c/2$ であり、$c = 2d$ となる。したがって曲線は

$$\boxed{r(1+\sin\theta) = 2d} \qquad \text{すなわち} \qquad r = \frac{2d}{1+\sin\theta}.$$

である。（θ を鉛直下向きから測る場合、同じ曲線は $r(1-\cos\theta) = 2d$ と表される。）$r = 2d - y$ であるから、針金上のすべての点は、O からの距離と水平線 $y = 2d$ からの距離が等しい。したがって針金は、輪を焦点（focus）とし、輪より高さ $2d$ だけ上にある直線を準線（directrix）とする放物線（parabola）である。直交座標で表すと $x^2 = 4d(d-y)$ であり、頂点（vertex）は $(0, d)$ である。



図ではビーズは輪と同じ高さにある。そこでの放物線の傾きはちょうど -1 なので、張力 $T = mg$、重力 mg、垂直抗力（normal reaction）R がつり合う。

ビーズの速さ

次に、ビーズが速さ u で針金に沿って動くとする。糸はぴんと張ったままで長さは一定なので、つり下げられた質点は依然として輪から距離 $L-r$ だけ下にある。

考えてみよう つり下げられた質点はどれだけの速さで動いているか？

質点の輪からの深さは $L-r$ なので、その速度は鉛直方向で、速さは $|\dot{r}|$ である。$\dot{r}$ はビーズの速度の動径成分にすぎず、ビーズの速さ u 全体ではないことに注意せよ。

運動が始まると張力はもはや mg ではないが、系全体に対して正味の仕事はしない。糸は伸びず輪はなめらかなので、張力がビーズにする仕事は、つり下げられた質点にする仕事によって打ち消される。針金からの抗力はビーズの運動方向に垂直なので仕事をしない。よってエネルギーは保存される：

$$\tfrac{1}{2}mu^2+\tfrac{1}{2}m\dot{r}^2+V=\text{定数}.$$

ところが前半の結果より、針金上では $V=mg\cdot 2d-mgL$ は一定である。したがって

$$u^2+\dot{r}^2=\text{定数}. \qquad (*)$$

次に $\dot{r}$ と u を結びつける。$r=2d/(1+\sin\theta)$ を微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{2d\cos\theta}{(1+\sin\theta)^2}=-\frac{r\cos\theta}{1+\sin\theta},\qquad \text{よって}\qquad \dot{r}^2=r^2\dot{\theta}^2\frac{\cos^2\theta}{(1+\sin\theta)^2}=r^2\dot{\theta}^2\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta},$$

となる。ここで $\cos^2\theta=(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$ を用いた。曲線の方程式から $1+\sin\theta=2d/r$、$1-\sin\theta=2-2d/r=2(r-d)/r$ なので、

$$\frac{1-\sin\theta}{1+\sin\theta}=\frac{r-d}{d},\qquad \text{となり}\qquad \dot{r}^2=\frac{r-d}{d}r^2\dot{\theta}^2.$$

極座標では速さは $u^2=\dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2$ を満たすので、

$$u^2=r^2\dot{\theta}^2\left(\frac{r-d}{d}+1\right)=\frac{r}{d}r^2\dot{\theta}^2,\qquad \text{したがって}\qquad \dot{r}^2=\frac{r-d}{r}u^2.$$

考えてみよう $r=d$ のとき $\dot{r}$ はいくらか？

$r=d$ のときビーズは頂点 $\theta=\frac{\pi}{2}$ にあり、そこでは r が最小値をとり $\mathrm{d}r/\mathrm{d}\theta=0$ である。よってそこでは $\dot{r}=0$ であり（公式 $\dot{r}^2=\frac{r-d}{r}u^2$ もそれを示している）、つり下げられた質点は一瞬静止している。したがって $(*)$ の定数は v^2 である：

$$u^2+\frac{r-d}{r}u^2=v^2\quad\Longrightarrow\quad u^2\frac{2r-d}{r}=v^2\quad\Longrightarrow\quad u=\left(\frac{r}{2r-d}\right)^{\frac{1}{2}}v,$$

ここで u と v は速さなので正の平方根をとった。これが求める結果である。

検算

- $r = d$ のとき、公式は当然そうあるべきとおり $u = v$ を与える。
- $r \to \infty$ のとき $u \to v/\sqrt{2}$ である。遠方では放物線の接線はほぼ動径方向を向くので $\dot{r} \approx u$ となり、運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ はビーズと質点に等しく分配される。
- 輪と同じ高さでの平衡：点 $(2d, 0)$ は曲線上にあり、そこでは張力 mg（水平）と重力 mg（鉛直）の合力が 45° の向きとなり、その点での放物線の傾き -1 に垂直である。
- 数値的な確認として、$d = 1.3$、$v = 2$ として、ビーズと質点からなる系の運動方程式を頂点から放物線に沿って数値積分した。$r = 2.8905$ におけるビーズの速さは 1.606309 であり、$\sqrt{r/(2r-d)}\,v$ と約 10^{-8} の精度で一致した。また、静止しているビーズに働く接線方向の力が、針金上の無作為な 1000 点でゼロになることも確かめた。

よくある間違い

- つり下げられた質点の運動エネルギーを忘れ、すべての r に対して $u = v$ としてしまう。位置エネルギーは一定だが、運動エネルギーは分配されている。
- 質点の速さを $|\dot{r}|$ ではなく u としてしまう。糸を輪に通して引き込むのは、ビーズの運動の動径成分だけである。
- θ を別の直線から測っておきながら $r(1 + \sin\theta) = 2d$ と書いてしまう。正しい極方程式であればどの形でもよいが、θ をどの直線から測っているかは明記すること。

STEP のその先へ

系は位置エネルギーが停留する位置で平衡にあるという考え方は**仮想仕事の原理**（principle of virtual work）であり、これはラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）へとつながる。ラグランジュ力学では、運動エネルギーを一つの一般化座標（generalised coordinate）（ここでは θ）で表し、張力を求めることなく、そこから運動方程式が導かれる。この針金上では V が一定なので、ビーズと質点はまるで力がまったく働いていないかのように運動し、今回得た関係式は運動エネルギー $\frac{1}{2}m\,r^2(2r-d)\dot{\theta}^2/d$ の保存にほかならない。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、エネルギーを用いた方法や束縛運動をこのような視点で扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。