解答例

# STEP II 1987、第 11 問

力学 ・ 摩擦とモーメント

> **STEP II 1987、問 11**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q11

## 鍵となる考え方

支点での力は未知であり、しかも求める必要がない。そこで、この力のモーメントが 0 となる支点 $O$ のまわりのモーメント（moment）を考える。棒は三次元的に配置されているが、輪の平面から自然な二つの方向が定まる。平面に垂直な方向（垂直抗力がはたらく方向）と、平面内の方向（摩擦力がはたらく方向）である。重力も同じように分解すれば、一方のモーメントの式から垂直抗力が、もう一方の式から摩擦力が求まる。その比が $\mu$ である。

## 解答

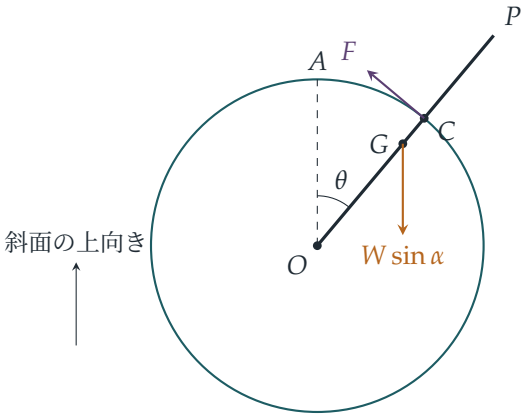
**モデル。** 棒は重さ $W$ の一様な棒 $OP$ であり、重心（centre of mass）$G$ はその中点にあるので $OG = \frac{1}{2}b$ である。棒は輪の中心 $O$ でなめらかに軸支されている。棒は円周上の点 $C$ で輪の上に載っているので $OC = a$ である。$O$ と $C$ はともに輪の平面上にあるから、棒はこの平面内にある。輪の最高点を $A$ とすると、$OA$ は最大傾斜線（line of greatest slope）に沿ってまっすぐ上を向く。$\angle AOC = \theta$ とする。

**力。** 棒にはたらく力は次のとおりである。

- $G$ にはたらく重力 $W$。
- なめらかな支点 $O$ での力。これは未知であるが、$O$ のまわりのモーメントをもたない。
- $C$ での接触力。棒と輪の針金は $C$ で交わる。棒は半径に沿い、針金は接線に沿っており、どちらも平面内にあるので、両者に共通な法線は平面に垂直である。したが

って垂直抗力（normal reaction）$R$ は輪の平面に垂直である。摩擦力（friction）$F$ は平面内にある。棒は $O$ のまわりに回転することでしか動けず、そのとき $C$ は輪の接線方向に動く。よって摩擦力はその接線に沿って、棒に垂直にはたらく。

重力を、平面に垂直な成分 $W\cos\alpha$（平面に向かう向き）と、平面内で最大傾斜線に沿って下向きの成分 $W\sin\alpha$ に分解する。図は平面を真上から見下ろしたもので、$A$ が上にある。$R$ は $C$ において紙面の手前向きである。




**$O$ のまわりのモーメント。** 支点はなめらかなので、残りの力の $O$ のまわりのモーメントの総和は、$O$ を通る**あらゆる**軸のまわりで 0 である。二つの軸から有用な式が得られる。

**平面内にあり、$O$ を通って棒に垂直な軸。**この軸のまわりにモーメントをもつのは、平面に垂直な力だけである。それは距離 $\frac{1}{2}b$ にある $W\cos\alpha$ と、距離 $a$ にある $R$ である。平面内の力 $F$ と $W\sin\alpha$ は、この軸と交わるか平行であるから、この軸のまわりのモーメントをもたない。よって

$$R\,a = W\cos\alpha\cdot\tfrac{1}{2}b, \qquad \text{よって} \qquad R = \frac{Wb\cos\alpha}{2a}.$$

**平面に垂直で、$O$ を通る軸。**今度は平面内の力だけが関係する。棒は斜面の上向きの方向と角 $\theta$ をなすので、$W\sin\alpha$ の棒に垂直な成分は $W\sin\alpha\sin\theta$ であり、距離 $\frac{1}{2}b$ の点にはたらく。摩擦力はもともと棒に垂直で、距離 $a$ の点にはたらく。よって

$$F\,a = W\sin\alpha\sin\theta\cdot\tfrac{1}{2}b, \qquad \text{よって} \qquad F = \frac{Wb\sin\alpha\sin\theta}{2a}.$$

重力の平面内成分は棒を $A$ から遠ざけ、輪の下の方へ振り下ろそうとし、摩擦力はこれに逆らう。

? **考えてみよう** 摩擦力には棒に沿った成分もありうるのではないか？

棒に沿った力は $O$ を通るので、$O$ のまわりのモーメントをもたない。この力は回転を助けることも妨げることもできず、また棒に沿った力ならば支点がいくらでも供給できる。起こりうる運動は $O$ のまわりの回転だけなので、限界のつり合い（limiting equilibrium）で問題となる摩擦力は接線方向の成分、すなわち $F$ である。摩擦力はすべて接線方向にはたらくものとする。

**限界のつり合い。** 限界のつり合いでは $F = \mu R$ であるから

$$\frac{Wb\sin\alpha\sin\theta}{2a} = \mu\frac{Wb\cos\alpha}{2a} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\mu = \tan\alpha\,\sin\theta}$$

となる（$0 \le \theta \le \pi$ とする）。$\tan\alpha\sin\theta \le \mu$ であれば、棒は角 $\theta$ の位置でつり合って静止する。$a$、$b$、$W$ がすべて消えていることに注意しよう。

## 検算

- $\theta = 0$ または $\theta = \pi$ のとき、棒は最大傾斜線に沿っている。このとき重力の平面内成分は棒の方向にまっすぐ引くので、摩擦力は不要であり $\mu = 0$ となる。$\alpha = 0$ のときも同様で、輪が水平ならば重力の平面内成分は生じない。
- 摩擦力が最も必要となるのは $\theta = \frac{1}{2}\pi$、すなわち棒が水平のときである。このとき $\mu = \tan\alpha$ となり、傾斜角 $\alpha$ の斜面上のブロックの場合と一致する。
- 数値による検算として、$\alpha, \theta, a, b, W$ を 2000 通りランダムに選び、力を三次元ベクトルとして構成した。$O$ のまわりのベクトルのモーメントの式を $R$ と $F$ について解いたところ、$F/R$ は $\tan\alpha\sin\theta$ と $4 \times 10^{-15}$ 以内で一致した。たとえば $\alpha = 30°$、$\theta = 60°$ のとき $\mu = \frac{1}{2}$ である。

## よくある間違い

- 鉛直面内にある輪の**内側**に棒が載っている場合のように、$C$ での垂直抗力を半径方向にとってしまう。ここでは棒は針金をまたいで載っているので、法線は輪の平面に垂直である。
- モーメントを考えずに力を分解してしまう。そうすると支点での力の未知な三成分が入り込むが、問題はそれを求めていない。

## STEP のその先へ

ここでは $O$ を通る互いに垂直な二つの軸のまわりのモーメントを考えた。これは、$O$ のまわりのトルク（torque）の総和が 0 であることを表す一つのベクトル方程式 $\sum \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ の近道である。ベクトルとしてのトルクと、三次元における剛体（rigid body）のつり合いの条件は、大学一年次の力学の標準的な内容であり、固定点のまわりの剛体の回転へとつながっていく。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、まさにこの方法でトルクと角運動量をベクトルとして展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。