解答例

STEP II 1987、第 10 問

純粋数学 ・ 群の公理

> **STEP II 1987、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q10

鍵となる考え方

すべては添字の上で起こっているので、各演算を添字 $1,2,\ldots,N$ に関するふつうの算術に翻訳する。第 1 の演算は「最大値をとる」ことであり、第 2 の演算は「差の絶対値をとって 1 を加える」ことである。そのうえで、4 つの公理（axioms）、すなわち閉性（closure）、結合法則（associativity）、単位元（identity）の存在、逆元（inverses）の存在を 1 つずつ調べる。成り立たない公理については具体的な反例（counterexample）を 1 つ示せば十分であり、成り立つ公理については一般的な論証が必要である。

解答

以下を通して、$a_j \circ a_k$ の添字を $j \circ k$ と書き、$*$ についても同様に書く。2 つの元が等しいのは、それらの添字が等しいときであり、そのときに限る。

演算 $\circ$

ここでは $a_j \circ a_k = a_{\max(j,k)}$ である。

閉性は成り立つ。 $1 \le j,k \le N$ ならば、$\max(j,k)$ は j と k のいずれかであるから $\{1,\ldots,N\}$ に属し、$a_j \circ a_k \in S$ となる。

結合法則は成り立つ。任意の j,k,l に対して

$$(a_j \circ a_k) \circ a_l = a_{\max(\max(j,k),l)} = a_{\max(j,k,l)} = a_{\max(j,\max(k,l))} = a_j \circ (a_k \circ a_l),$$

である。どちらの括弧のつけ方でも、3 つの添字のうち最大のものが得られるからである。

単位元は存在し、それは a_1 である。 どの添字も 1 以上であるから $\max(1,k) = \max(k,1) = k$ となり、すべての k に対して $a_1 \circ a_k = a_k \circ a_1 = a_k$ が成り立つ。

逆元は存在しない。 a_j の逆元とは、$a_j \circ a_k = a_1$、すなわち $\max(j,k) = 1$ を満たす a_k のことである。しかし $\max(j,k) \geq j$ であるから、$j \geq 2$ のときこれは不可能である。たとえば、どの k に対しても $a_2 \circ a_k$ は a_2 かそれより後の元であり、決して a_1 にはならない。逆元をもつのは a_1 だけである（その逆元は自分自身である）。

したがって、$\circ$ に関して S は閉性、結合法則、単位元の存在を満たすが、逆元の存在は満たさず、群（group）ではない。

> **考えてみよう** ほかの元が単位元になる可能性はないか。もしあれば、逆元についての議論をやり直さなければならない。

その可能性はない。単位元は一意的である。e と e' がともに単位元であるとすると、$e = e \circ e' = e'$ となる。したがって「$a_j \circ a_k$ が単位元に等しい」というときの単位元の候補は a_1 だけであり、上の議論で完結している。

演算 $*$

ここでは $a_j * a_k = a_{|j-k|+1}$ である。$N = 4$ のとき、添字の演算表は次のようになる。

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	1	2	3
3	3	2	1	2
4	4	3	2	1

この表に見られるパターンは、すべての N について成り立つ。

閉性は成り立つ。 $1 \leq j,k \leq N$ ならば $0 \leq |j-k| \leq N-1$ であるから $1 \leq |j-k|+1 \leq N$ となり、$a_j * a_k \in S$ である。

単位元は存在し、それは a_1 である。 $k \geq 1$ であるから $|1-k| = k-1$ となり、$a_1 * a_k = a_k$ である。同様に $a_k * a_1 = a_k$ も成り立つ（$|j-k| = |k-j|$ であるから、この演算は可換（commutative）である）。

逆元は存在する。 $a_j * a_j = a_{0+1} = a_1$ は単位元であるから、すべての元は自分自身の逆元である（これは表の対角線に 1 が並んでいることに対応する）。

結合法則は成り立たない。 a_2, a_2, a_3 をとる（これには $N \geq 3$ が必要である）。

$$(a_2 * a_2) * a_3 = a_1 * a_3 = a_3,$$
$$a_2 * (a_2 * a_3) = a_2 * a_{|2-3|+1} = a_2 * a_2 = a_1.$$

両者は異なるので、$*$ は結合的ではない。

したがって、$*$ に関して S は閉性、単位元の存在、逆元の存在を満たすが、結合法則は満たさず、やはり群ではない。

考えてみよう $N > 2$ という条件はどこで使われたか。

結合法則の反例においてのみであり、そこでは a_3 を用いている。$N = 2$ のとき、演算表は位数（order）2 の群の演算表であり（a_1 が単位元、$a_2 * a_2 = a_1$）、$*$ は結合的である。一方、$\circ$ については逆元に関する議論に a_2 しか必要ないので、$N = 2$ のときも $\circ$ は群をなさない。

検算

小さな場合を総当たりで調べた。2 から 9 までのすべての N について、結合法則を調べるためにすべての 3 つ組を列挙し、単位元と逆元を直接探索した。$\circ$ について：閉じており、結合的で、単位元は a_1、逆元をもつのは a_1 のみであった。$*$ について：閉じており、単位元は a_1、すべての元が自分自身の逆元であり、結合法則は $N \geq 3$ のすべての場合に（(a_2, a_2, a_3) においても）成り立たず、$N = 2$ のときは成り立った。$N = 3$ の場合は、3×3 の表から手計算で 1 分もあれば確かめられる。

よくある間違い

- 「max」は掛け算とは違うから $\circ$ には単位元がない、と主張してしまう。最小の元を確かめてみよ。a_1 が単位元になっている。
- $*$ の結合法則を一般に証明しようとしたり、a_1 を含む 3 つ組だけを調べたりする（a_1 は単位元なので、そのような 3 つ組では必ず結合法則が成り立つ）。必要なのは具体的な反例 1 つである。
- 閉性を忘れる。当然のことと思い込みやすいが、ここでは $|j - k| \leq N - 1$ という評価が必要である。

STEP のその先へ

$\circ$ に関する S のように、結合的な演算と単位元をもつ集合は**モノイド**（monoid）とよばれる。全順序集合（totally ordered set）上の「max」は代表的な例であり、これは**半束**（semilattice）でもある。$*$ に関する S のように、閉性、単位元、逆元をもつが結合法則を満たさない集合は、結合法則が本当に独立した公理であること、すなわち他の

3 つの公理から導くことができないことを示している。群の公理がどのように連携して働くかについては、Allenby, *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照せよ。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。