解答例

STEP II 1987、第 1 問

純粋数学 • 代数的恒等式

> **STEP II 1987、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s2-q1

鍵となる考え方

どれか一つの文字について代入しようとしてはいけない。そうではなく、右辺を展開（expansion）するのである。平方 a^2, b^2, c^2 は両辺に現れて打ち消し合うので、残るのは x と一次式（linear expression）の積であり、その一次式はちょうど与えられた条件の定数倍になっている。数 7 と 11 がどこから来るのかがわかれば、一般的な結果が導かれる。

解答

展開を一度、一般の形で行っておくと見通しがよい。任意の数 p, q, r に対して

$$(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2=(p^2+q^2+r^2)x^2-2x(pa+qb+rc)+a^2+b^2+c^2,$$

であるから、

$$(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x[(p^2+q^2+r^2)x-2(pa+qb+rc)]. \qquad (*)$$

小問 (i)

ここでは $(p,q,r)=(1,2,3)$ であるから $p^2+q^2+r^2=14$ となり、$(*)$ は次のようになる。

$$(x-a)^2+(2x-b)^2+(3x-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x[14x-2(a+2b+3c)].$$

$a+2b+3c=7x$ ならば、括弧の中は $14x-14x=0$ である。よって両辺は等しく、示すべきことが示された。

小問 (ii)

今度は $(p,q,r)=(2,3,3)$ であるから $p^2+q^2+r^2=4+9+9=22$ であり、

$$(2x-a)^2+(3x-b)^2+(3x-c)^2-(a^2+b^2+c^2)=x[22x-2(2a+3b+3c)].$$

$2a+3b+3c=11x$ ならば、括弧の中は $22x-22x=0$ となり、(ii) が証明される。

考えてみよう なぜ (i) では 7、(ii) では 11 なのか？

これらは $p^2+q^2+r^2$ の半分である。すなわち $7=\frac{1}{2}(1+4+9)$, $11=\frac{1}{2}(4+9+9)$ である。このことから、一般的な主張がどうあるべきかがわかる。

一般的な結果

恒等式（identity）$(*)$ から、次のことが直ちに証明される。

任意の実数 p,q,r,a,b,c,x に対して、

$$2(pa+qb+rc)=(p^2+q^2+r^2)\,x,$$

ならば

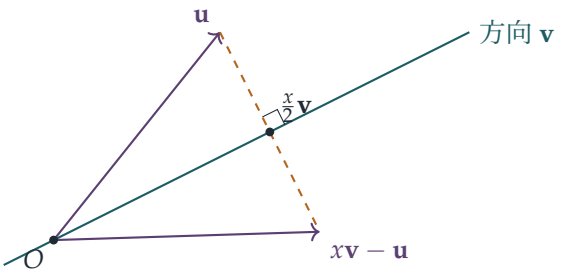
$$a^2+b^2+c^2=(px-a)^2+(qx-b)^2+(rx-c)^2.$$

小問 (i) は $(p,q,r)=(1,2,3)$ の場合であり、小問 (ii) は $(p,q,r)=(2,3,3)$ の場合である。

同じ展開は変数がいくつあっても通用する。$2\sum_{i=1}^{n}p_ia_i=(\sum_{i=1}^{n}p_i^2)x$ ならば $\sum a_i^2=\sum(p_ix-a_i)^2$ である。また $(*)$ から逆（converse）も得られる。すなわち、$x\neq 0$ かつ恒等式が成り立つならば、条件も成り立たなければならない。

幾何学的には何が起きているのか

$\mathbf{u}=(a,b,c)$, $\mathbf{v}=(p,q,r)$ とおく。条件は $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=\frac{x}{2}|\mathbf{v}|^2$ と書け、これは $\frac{x}{2}\mathbf{v}$ が、$\mathbf{u}$ から O を通り方向 $\mathbf{v}$ をもつ直線に下ろした垂線の足（foot of the perpendicular）であることを意味する。このときベクトル $x\mathbf{v}-\mathbf{u}=2\cdot\frac{x}{2}\mathbf{v}-\mathbf{u}$ は、その直線に関する $\mathbf{u}$ の鏡映（reflection）である。鏡映は長さを保つので $|x\mathbf{v}-\mathbf{u}|=|\mathbf{u}|$ となり、これがまさに恒等式である。



検算

(i) で $x = 1, a = b = 0, c = \frac{7}{3}$ としてみる。左辺は $\frac{49}{9}$ であり、右辺は $1 + 4 + (\frac{2}{3})^2 = 5 + \frac{4}{9} = \frac{49}{9}$ である。さらに、両小問と一般的な結果を、それぞれ 2000 個の無作為な場合（一般の場合は最大 6 変数）について厳密な有理数演算（rational arithmetic）で検証し、$x \neq 0$ かつ条件が成り立たないときには必ず恒等式も成り立たないことを確認した。

よくある間違い

- いきなり $c = \frac{1}{3}(7x - a - 2b)$ を代入してしまう。これでも解けるが、計算が煩雑になり、構造が見えなくなる。
- 一般的な結果を、k と p, q, r の関係を示さずに「$pa + qb + rc = kx$」として述べてしまう。恒等式が成り立つには $k = \frac{1}{2}(p^2 + q^2 + r^2)$ でなければならない。

STEP のその先へ

この幾何学的な描像は線形代数（linear algebra）の出発点である。写像 $\mathbf{u} \mapsto 2\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|^2}\mathbf{v} - \mathbf{u}$ は鏡映であり、直交線形写像（orthogonal linear map）である。そして直交写像とは、長さを保つ線形写像にほかならない。このような射影（projection）や鏡映は、最小二乗法（least squares）や、数値計算で用いられるハウスホルダー変換（Householder transformations）の基礎となっている。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、これらの考え方を同じく幾何学的な味わいをもって展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。