解答例

STEP I 1987、第 9 問

純粋数学 ・ 重心座標

> **STEP I 1987、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q9

鍵となる考え方

A から B に向かって進むことは、ベクトル $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ の何分の一かを加えることにほかならない。これを一度行えば線分上の点が得られる。二度行う、すなわちまず AB に沿って進み、次にその点から C に向かって進むと、三角形全体を掃き尽くすことになる。図示の部分では、各場合を既に理解しているものの形に書き直すのがこつである。すなわち、三角形の場合を反転したものか、点 A に二本の辺ベクトルの実数倍を加えたものかのどちらかに書き直すのである。

解答

AB 上の点

線分（segment）AB 上の点 P には、A から $\overrightarrow{AB}$ に沿って割合 t だけ進むことで到達する。ただし $0 \le t \le 1$ である（$t = 0$ のとき A、$t = 1$ のとき B となる）。よって

$$\mathbf{p} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - t)\mathbf{a} + t\,\mathbf{b}.$$

$\rho = 1 - t$、$\sigma = t$ とおく。$0 \le t \le 1$ であるから $\rho \ge 0$ かつ $\sigma \ge 0$ であり、さらに $\rho + \sigma = 1$ である。これが求める形である。逆に、このような組 ρ, σ はどれも、$t = \sigma$ とすることで線分上の点を与える。

PC 上の点と三角形の内部の点

まったく同様にして、線分 PC 上の点 Q の位置ベクトル（position vector）は

$$\mathbf{q} = (1 - s)\mathbf{p} + s\,\mathbf{c}, \qquad 0 \le s \le 1.$$

$\mathbf{p} = \rho\mathbf{a} + \sigma\mathbf{b}$ を代入すると

$$\mathbf{q} = (1-s)\rho\,\mathbf{a} + (1-s)\sigma\,\mathbf{b} + s\,\mathbf{c}.$$

$\lambda = (1-s)\rho$、$\mu = (1-s)\sigma$、$\nu = s$ とおく。いずれも非負の数の積であるから $\lambda, \mu, \nu \geq 0$ である。また

$$\lambda + \mu + \nu = (1-s)(\rho+\sigma) + s = (1-s) + s = 1.$$

考えてみよう 三角形の内部の点がどれも、ある線分 PC 上にあるのはなぜか。

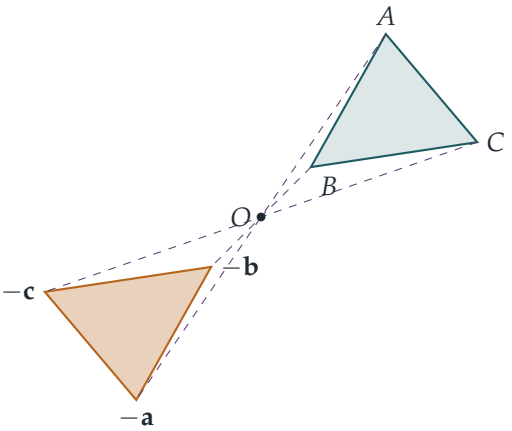
三角形の内部（または周上）の点 X をとる。$X = C$ ならば示すことはない。$s = 1$ とすればよい。そうでなければ、C から X を通る直線を引き、X の先まで延ばす。X は角 ACB の内部にあるから、この直線は CA と CB の間にとどまり、したがって向かい合う辺 AB と、ある点 P で交わらなければならない。X は三角形の中にあるから C と P の間にあり、よって X は線分 PC 上にある。上の計算により、$\mathbf{x} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$、ただし $\lambda, \mu, \nu \geq 0$ かつ $\lambda + \mu + \nu = 1$ と表され、これが示すべきことであった。

小問 (i)

$\lambda = -\lambda'$、$\mu = -\mu'$、$\nu = -\nu'$ とおく。条件は $\lambda', \mu', \nu' \geq 0$ かつ $\lambda' + \mu' + \nu' = 1$ となり、点は

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = -\left(\lambda'\mathbf{a} + \mu'\mathbf{b} + \nu'\mathbf{c}\right).$$

いま示したことにより、括弧の中は三角形 ABC のすべての点を動く（最初の部分の逆の主張により、このような結合はどれも三角形の中にある）。よって求める領域は、X が三角形 ABC の中にあるような点 $-\mathbf{x}$ 全体の集合である。言い換えれば、それは頂点を $-\mathbf{a}$、$-\mathbf{b}$、$-\mathbf{c}$ とする三角形とその内部であり、三角形 ABC を原点 O のまわりに半回転（half-turn）した像である。



琥珀色で塗った三角形が (i) の答えである。各頂点は ABC の頂点を O に関して対称移動したものであり、破線でそれを示している。

小問 (ii)

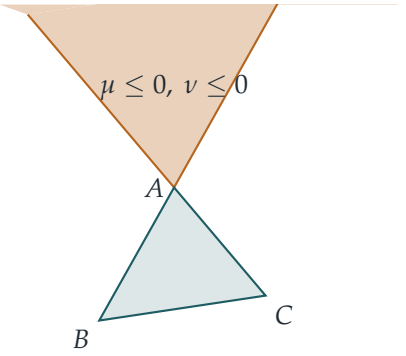
このとき $\lambda = 1 - \mu - \nu$ であるから

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \nu(\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

A から出発して、$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の実数倍を加えるのである。$m, n \geq 0$ として $\mu = -m$、$\nu = -n$ と書くと、点は

$$\mathbf{a} + m(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + n(\mathbf{a} - \mathbf{c}), \qquad m \geq 0,\ n \geq 0.$$

ベクトル $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ は BA を A の先へ延長した向きを指し、$\mathbf{a} - \mathbf{c}$ は CA を A の先へ延長した向きを指す。平行でない二つのベクトルの非負結合は、ちょうどそれらの間の角を埋め尽くす（$\mathbf{b} - \mathbf{a}$ と $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ は平行でないので、平面上のすべての点はただ一つの組 m, n によって $\mathbf{a} + m(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + n(\mathbf{a} - \mathbf{c})$ と表される）。よって求める領域は、A を頂点とし、BA と CA を A の先へ延長した半直線を境界とする無限に広がる楔形の領域であり、境界の半直線も含む。これは角 BAC の対頂角（vertically opposite angle）である。問題では λ に制限はないが、ここでは自動的に 1 以上になることに注意しておく。



琥珀色の楔形（どこまでも続く）が (ii) の答えである。その縁は、辺 BA と CA を A を越えて延長したものである。青緑色の三角形 ABC は参考のために示してある。

検算

- 頂点：(ii) では、$(\lambda, \mu, \nu) = (1, 0, 0)$ は楔形の先端である A 自身を与える。$(2, -1, 0)$ は $2\mathbf{a} - \mathbf{b}$、すなわち B の A に関する対称点を与え、これは一方の縁の上にある。(i) では、$(-1, 0, 0)$ は反転した三角形の頂点 $-\mathbf{a}$ を与える。

- 重心：(i) では、$\lambda = \mu = \nu = -\frac{1}{3}$ は ABC の重心（centroid）の -1 倍を与え、これは反転した三角形の重心であって、そうなるべきものである。
- 数値的には、コンピュータで無作為な三角形と、それぞれの条件を満たす無作為な係数を 20,000 組とった。その結果、(i) から得られる点はすべて三角形 $(-\mathbf{a}, -\mathbf{b}, -\mathbf{c})$ の中にあること、(ii) から得られる点はすべて A から見た $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ と $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ 方向の座標が非負であること、そして ABC のすべての点がある線分 PC 上の点として分解できることが確かめられた。

よくある間違い

- (i) で、ABC の近くに領域を描いてしまう。係数の和は 1 ではなく -1 であるから、領域は ABC を原点のまわりに半回転したものであり、O の位置に依存する。
- (ii) で、三角形だけを描いてしまう。μ と ν には下限がないので、領域は有界でない。
- BAC の隣の角（たとえば AB と CA の延長との間）を塗ってしまう。それには μ, ν の一方が正である必要がある。

STEP のその先へ

$\lambda + \mu + \nu = 1$ を満たす数の組 (λ, μ, ν) は、三角形に関する点の**重心座標**（barycentric coordinates）である。和が 1 のとき、点は原点の位置に依存しない。実際、すべての位置ベクトルを $\mathbf{d}$ だけずらすと、$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$ も $(\lambda + \mu + \nu)\mathbf{d} = \mathbf{d}$ だけずれる。(ii) の答えが真に幾何的な領域である一方で、(i) が O に依存するのはこのためである。三角形そのものは A、B、C の**凸包**（convex hull）であり、これは線形計画法（linear programming）や凸最適化（convex optimisation）の核心にある概念である。重心座標の符号によって平面は七つの領域に分かれ、(ii) はそのうちの一つである。こうしたアフィン的な考え方を大学一年次の視点から学ぶには、Strang, *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。