解答例

STEP I 1987、第 8 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 1987、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q8

鍵となる考え方

置換（substitution）によって変数を変えてよいのは、元の変数がある区間を動くときに、新しい変数も区間を滑らかに一方向へ動く場合に限られる。ここでは $t = 1/x$ が $x = 0$ で発散し、しかもこの点は $[-1, 1]$ のちょうど真ん中にある。したがって「新しい積分範囲」-1 と 1 は、まったく別の t の値の集合を表している。2 つの被積分関数の符号を見るだけで、どこかがおかしいことが確かめられる。

解答

置換がうまくいかない理由

形式的には、$x = 1/t$ とおくと $\mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ であり、

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)^2} = \frac{t^4}{(1+t^2)^2}, \qquad \text{よって} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

となり、$x = \pm 1$ は $t = \pm 1$ に対応する。2 つの積分が等しいことを「示す」なら、このようにするだろう。しかし、これは正しいはずがない。1 つ目の被積分関数（integrand）はいたるところ正なので 1 つ目の積分は正であるが、2 つ目の被積分関数はいたるところ ≤ 0 なので 2 つ目の積分は負である。

> ? **考えてみよう** x が -1 から 1 まで動くとき、$t = 1/x$ は実際にどのような値をとるか？

x が -1 から 0^- まで増加するとき、t は -1 から $-\infty$ まで減少する。$x = 0$ では t はまったく存在しない。そして x が 0^+ から 1 まで動くとき、t は $+\infty$ から 1 まで下り

てくる。したがって x の区間 $[-1,1]$ に対応するのは $t \in (-\infty,-1]\cup[1,\infty)$、すなわち $[-1,1]$ の**外側**であって、$[-1,1]$ そのものではない。置換積分の公式では、$x=\phi(t)$ において ϕ が新しい積分範囲の間にある t の区間全体で微分可能であることが必要だが、$\phi(t)=1/t$ は $t=0\in[-1,1]$ で定義すらされていない。$(-1,1)$ に含まれる t の値は $|x|>1$ に対応し、これは元の範囲の外にある。

正しく使う、つまり半分ずつ別々に適用すると、この置換からたとえば

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \int_\infty^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_1^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t,$$

が得られる。これは正しい等式である（後で確かめる）が、t についての $[-1,1]$ 上の積分については何も教えてくれない。

1 つ目の積分

$x=\tan\theta$ とおくと $\mathrm{d}x=\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$、$1+x^2=\sec^2\theta$ である。tan は $[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}]$ 上で滑らかかつ増加なので、この置換は問題ない。すると

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} &= \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \tfrac{1}{2}(1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{4}\sin 2\theta = \tfrac{1}{2}\theta + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \tfrac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)},\end{aligned}$$

となる。ここで $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\tan\theta\cos^2\theta$ を用いた。したがって

$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = \left[\tfrac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2(1+x^2)}\right]_{-1}^1 = 2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}}.$$

2 つ目の積分

分子を $-t^2 = 1-(1+t^2)$ と書き直すと

$$\frac{-t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{(1+t^2)^2} - \frac{1}{1+t^2}.$$

となる。第 1 項を $[-1,1]$ 上で積分すると、前の部分より $\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ であり、また $\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = [\arctan t]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2}$ である。よって

$$\int_{-1}^1 \frac{-t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\frac{\pi}{2} = \boxed{\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}},$$

であり、これは被積分関数の符号から要請されるとおり負（≈ -0.285）である。一方、1 つ目の積分は約 1.285 である。

検算

- シンプソンの公式（Simpson's rule）で 2 つの積分を計算すると 1.2853981… と −0.2853981… が得られ、$\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$ および $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$ と一致する。
- 2 つの答えの和は 1 である。これには理由がある。$\frac{1}{(1+x^2)^2}-\frac{x^2}{(1+x^2)^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ であり、これは $\frac{x}{1+x^2}$ の導関数（derivative）であって、$\left[\frac{x}{1+x^2}\right]_{-1}^{1}=1$ となる。
- 半分の区間についての正しい等式も確かめられる：$\int_1^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2}$。

よくある間違い

- 「$1/t$ は $t=0$ で定義されない」とだけ述べ、x の範囲 $[-1,1]$ が $|t|\geq 1$ に対応することを説明しないこと。本当に重要なのは、2 つの積分がそれぞれ異なる値の集合にわたっているという点である。
- $\mathrm{d}x=-\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ の符号を間違えること。そうすると、誤りを示す決定的な符号の矛盾が見えなくなってしまう。
- $\cos^2\theta$ を積分するときに $\frac{1}{4}\sin 2\theta$ の項を忘れること。

STEP のその先へ

置換積分の公式 $\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)\,\mathrm{d}t=\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x$ は、解析学（analysis）の最初の講義で連鎖律（chain rule）と微積分学の基本定理（Fundamental Theorem of Calculus）から証明される。その証明を見ると、何が必要なのかが正確にわかる。すなわち、ϕ は $[a,b]$ 全体で連続微分可能でなければならない。ここではそれがただ 1 点で成り立たず、その 1 点だけで結果が崩れてしまうのである。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は、リーマン積分（Riemann integral）とこれらの定理を丁寧に展開している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。