解答例

STEP I 1987、第 7 問

純粋数学 ・ 三角級数

> **STEP I 1987、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q7

鍵となる考え方

どちらの級数も、角が等間隔で増えていく正弦の和である。$\sin((2k+1)\theta)$ のような項に $2\sin\theta$ または $2\cos\theta$ を掛けると、積和公式（product-to-sum formula）によって隣り合う二つの項の**差**または**和**に変わる。そのため級数全体が隣同士で打ち消し合い、ほとんどの項が消える（telescoping）。選ぶべきことは、どちらの因子を掛けるかだけである。ふつうの和には $2\sin\theta$ が、符号が交互に変わる和には $2\cos\theta$ が適している。

解答

準備

$\theta = \dfrac{2\pi}{23}$ とおく。角は $2\pi/23,\ 6\pi/23,\ 10\pi/23, \ldots, 42\pi/23$ であり、毎回 $4\pi/23 = 2\theta$ ずつ増える。$21\theta = 42\pi/23$ であるから、これらの角は

$$(2k+1)\theta \qquad （ただし k = 0, 1, \ldots, 10,$$

と表される。したがって項は 11 個あり、交代級数（alternating series）では第 k 項の符号は $(-1)^k$ である（最後の項 $k=10$ の符号は $+$ であり、問題と合っている）。よって求めたいのは

$$S_1 = \sum_{k=0}^{10} \sin((2k+1)\theta), \qquad S_2 = \sum_{k=0}^{10} (-1)^k \sin((2k+1)\theta).$$

である。以下では $22\theta = \dfrac{44\pi}{23} = 2\pi - \dfrac{2\pi}{23}$ であること、すなわち

$$\cos 22\theta = \cos\theta, \qquad \sin 22\theta = -\sin\theta.$$

を用いる。

第一の級数

積和公式 $2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$ により、

$$2\sin\theta\,\sin((2k+1)\theta)=\cos(2k\theta)-\cos((2k+2)\theta).$$

である。$k=0,\dots,10$ について和をとると、$1\le k\le 10$ の各 $\cos(2k\theta)$ は正負の符号で一度ずつ現れて打ち消し合い、

$$2\sin\theta\,S_1=\cos 0-\cos 22\theta=1-\cos\theta.$$

が残る。$0<\theta<\pi$ より $\sin\theta\neq 0$ であるから、両辺を割ることができて

$$S_1=\frac{1-\cos\theta}{2\sin\theta}=\frac{2\sin^2(\theta/2)}{4\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)}=\tfrac{1}{2}\tan\frac{\theta}{2},$$

を得る。ここで $1-\cos\theta=2\sin^2(\theta/2)$ と $\sin\theta=2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ を用い、$\sin(\theta/2)\neq 0$ で約分した。$\theta/2=\pi/23$ であるから、

$$\boxed{\sin\tfrac{2\pi}{23}+\sin\tfrac{6\pi}{23}+\cdots+\sin\tfrac{42\pi}{23}=\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{\pi}{23}.}$$

考えてみよう 交代級数のときは、なぜ再び $2\sin\theta$ を掛けるのではなく $2\cos\theta$ を掛けるのだろうか。

$2\sin\theta$ を掛けると差 $\cos(2k\theta)-\cos((2k+2)\theta)$ が得られるが、符号が交互に変わるため、隣り合う項は打ち消し合わずに**足し合わされて**しまう。$2\cos\theta$ を掛けると**和** $\sin((2k+2)\theta)+\sin(2k\theta)$ が得られ、今度は交互に変わる符号のおかげで打ち消し合いが起こる。

第二の級数

$2\cos A\sin B=\sin(B+A)+\sin(B-A)$ により、

$$2\cos\theta\,\sin((2k+1)\theta)=\sin((2k+2)\theta)+\sin(2k\theta).$$

である。これに $(-1)^k$ を掛けて和をとる。$1\le k\le 10$ のとき、$\sin(2k\theta)$ は第 $k-1$ 項から符号 $(-1)^{k-1}$ で、第 k 項から符号 $(-1)^k$ で現れるので打ち消し合う。残るのは $k=0$ からの $\sin 0$ と $k=10$ からの $(-1)^{10}\sin 22\theta$ であり、

$$2\cos\theta\,S_2=\sin 22\theta=-\sin\theta.$$

となる。$0<\theta<\pi/2$ より $\cos\theta\neq 0$ であるから、

$$S_2=-\frac{\sin\theta}{2\cos\theta}=-\tfrac{1}{2}\tan\theta,$$

すなわち

$$\boxed{\sin\tfrac{2\pi}{23} - \sin\tfrac{6\pi}{23} + \cdots - \sin\tfrac{38\pi}{23} + \sin\tfrac{42\pi}{23} = -\tfrac{1}{2}\tan\tfrac{2\pi}{23}.}$$

である。正の値に見える形を好むなら、$\tan(\pi - x) = -\tan x$ より、これは $\frac{1}{2}\tan\frac{21\pi}{23}$ とも書ける。

検算

- 数値的には $\frac{1}{2}\tan(\pi/23) \approx 0.068723$、$-\frac{1}{2}\tan(2\pi/23) \approx -0.140093$ である。11 個の項を直接足し合わせると、有効数字 15 桁まで同じ値が得られる。
- 第二の答えが負であることは納得できる。部分和はおよそ ± 0.5 の間を振れ動き、最後に加える項 $\sin(42\pi/23) \approx -0.27$ そのものが負である。
- 同じ方法で一般の公式 $\sum_{k=0}^{n-1}\sin((2k+1)\theta) = \dfrac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$ と $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sin((2k+1)\theta) = (-1)^{n-1}\dfrac{\sin 2n\theta}{2\cos\theta}$ が得られる。$n = 1$ を代入してみよ。どちらも $\sin\theta$ になる。

よくある間違い

- 項の数え間違い。角は $2\pi/23$ ではなく $4\pi/23$ ずつ増えるので、項は 21 個ではなく 11 個である。
- 両方の答えが正になると思い込むこと。π を超える角の正弦は負であり、負の符号は $\sin(44\pi/23) = -\sin(2\pi/23)$ から生じている。

STEP のその先へ

これらの和は等比級数（geometric series）の虚部（imaginary part）である。$S_1 = \operatorname{Im}\sum e^{i(2k+1)\theta}$ であり、S_2 は公比を $-e^{2i\theta}$ とした同様の和である。これにより、どちらの答えにも別の道筋でたどり着ける。ディリクレ核（Dirichlet kernel）のようなこの種の和は、関数を正弦と余弦から組み立てるフーリエ解析（Fourier analysis）の出発点である。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）は、回転するベクトルの図を用いて、このような和がなぜそのように振る舞うのかを示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。