解答例

STEP I 1987、第 6 問

純粋数学 ・ 面積と逆関数

> **STEP I 1987、問 6**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q6

鍵となる考え方

$\mathrm{F}(s)$ は曲線の**下側**、つまり曲線と x 軸の間の面積であり、$\mathrm{G}(t)$ は曲線の**左側**、つまり曲線と y 軸の間の面積である。同じ図に描くと、この二つの領域は合わせて頂点 $(0,0)$ と (s,t) をもつ長方形を覆う。ただし、頂点 (s,t) がちょうど曲線上にない限り、はみ出す部分が残る。後半では、頂点がちょうど曲線上に来るように s を選ぶ。すると、難しい積分 $\int \sin^{-1} y \,\mathrm{d}y$ が、易しい積分 $\int \sin x \,\mathrm{d}x$ からただちに得られる。

解答

不等式 $(*)$

まず、f についての事実を確認する。この関数は連続で、各値を高々一度しかとらないので、狭義単調（strictly monotonic）である（増加してから減少するような連続関数は、中間値の定理（intermediate value theorem）により、ある値を二度とってしまうからである）。$\mathrm{f}(0) = 0$ かつ $\mathrm{f}(x) \geq 0$ であるから、狭義**単調増加**でなければならない。したがって g も増加関数であり、$0 \leq x \leq a$、$0 \leq y \leq \mathrm{f}(a)$ に対して

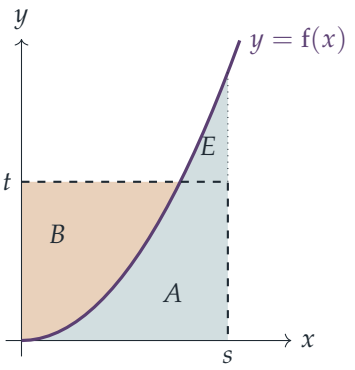
$$y \leq \mathrm{f}(x) \iff \mathrm{g}(y) \leq x.$$

が成り立つ。

二つの領域を次のように定める。

$$A = \{(x,y) : 0 \leq x \leq s,\ 0 \leq y \leq \mathrm{f}(x)\}, \qquad \text{面積} \mathrm{F}(s),$$
$$B = \{(x,y) : 0 \leq y \leq t,\ 0 \leq x \leq \mathrm{g}(y)\}, \qquad \text{面積} \mathrm{G}(t),$$

また、R を長方形 $0 \le x \le s$、$0 \le y \le t$ とする。その面積は st である。B の面積が $\mathrm{G}(t)$ となるのは、長さ $\mathrm{g}(y)$ の水平な細長い帯を積分しているからである（「y についての面積」）。



R のすべての点は A または B に属する。実際、$(x, y) \in R$ ならば、$y \le \mathrm{f}(x)$ であってその点は A に属するか、$y > \mathrm{f}(x)$ すなわち $x < \mathrm{g}(y)$ であってその点は B に属するかのいずれかである。共通部分 $A \cap B$ は曲線の弧そのものにすぎず、その面積はゼロである。よって

$$\mathrm{F}(s) + \mathrm{G}(t) = \text{面積}(A) + \text{面積}(B) \ge \text{面積}(A \cup B) \ge \text{面積}(R) = st,$$

となり、これが $(*)$ である。

考えてみよう 長方形に含まれないのに数えられているのは、正確にはどの部分か？

超過分は、$A \cup B$ のうち R からはみ出した部分 E である。$t < \mathrm{f}(s)$ の場合（図の場合）、B は R の内側にとどまるが、A は領域 $\mathrm{g}(t) < x \le s$、$t < y \le \mathrm{f}(x)$ において $y = t$ より上にはみ出す。すべての $x > \mathrm{g}(t)$ に対して $\mathrm{f}(x) > t$ であり、f は連続であるから、この領域の面積は正であり、不等式は狭義の不等号で成り立つ。$t > \mathrm{f}(s)$ の場合も、役割を入れ替えて同じことが起こる。すなわち、B が $x = s$ より右にはみ出す。$t = \mathrm{f}(s)$ の場合は、頂点 (s, t) が曲線上にあり、$A \cup B$ はちょうど R に一致し、超過分は存在しない。

よって、$(*)$ **において等号が成り立つのは** $t = \mathrm{f}(s)$ **のとき、かつそのときに限る**。すなわち、(s, t) が曲線上にあるときである。

$\sin^{-1} y$ の積分

$[0, \frac{1}{2}\pi]$ 上で $\mathrm{f}(x) = \sin x$ とする。これは連続かつ増加で、原点を通り、第一象限にとどまるので、$a = \frac{1}{2}\pi$、$\mathrm{f}(a) = 1$、$\mathrm{g}(y) = \sin^{-1} y$ として上の議論がすべて適用できる。

$t \in [0,1]$ が与えられたとき、$s = \sin^{-1} t$ とおく。これは $[0, \frac{1}{2}\pi]$ に属する。すると $t = \sin s = \mathrm{f}(s)$ であるから、$(*)$ において等号が成り立つ。

$$\int_0^t \sin^{-1} y \,\mathrm{d}y = \mathrm{G}(t) = st - \mathrm{F}(s).$$

次に、易しいほうの積分を計算する。

$$\mathrm{F}(s) = \int_0^s \sin x \,\mathrm{d}x = 1 - \cos s.$$

$s = \sin^{-1} t$ を代入すると、

$$\int_0^t \sin^{-1} y \,\mathrm{d}y = t \sin^{-1} t - (1 - \cos(\sin^{-1} t)),$$

となり、求める結果が得られた。

微分による検算

$\sin^{-1} t \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ であるから、その余弦は非負であり、$\cos(\sin^{-1} t) = \sqrt{1-t^2}$ である。したがって右辺は $t \sin^{-1} t - 1 + \sqrt{1-t^2}$ となる。$0 \le t < 1$ に対して、$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sin^{-1} t = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ と積の微分法則（product rule）を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t \sin^{-1} t - 1 + \sqrt{1-t^2}\right) &= \sin^{-1} t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} \\ &= \sin^{-1} t,\end{aligned}$$

となる。これは、微分積分学の基本定理（fundamental theorem of calculus）により、左辺の導関数（derivative）に等しい。両辺とも $t = 0$ で 0 であるから、$[0,1)$ 上で一致し、連続性により $t = 1$ においても一致する。

検算

- $t = 1$ のとき：公式は $\frac{1}{2}\pi - 1 \approx 0.5708$ を与える。幾何的には、$y = \sin x$ の左側で高さ 1 までの部分の面積は、長方形 $\frac{1}{2}\pi \times 1$ からアーチの下の面積 1 を引いたものである。$[0,1]$ 上での $\sin^{-1} y$ の数値積分は 0.57080 を与える。
- $t = \frac{1}{2}$ のとき：公式は $\frac{\pi}{12} - 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.12782$ を与え、シンプソンの公式（Simpson's rule）による値と一致する。
- $(*)$ については、$\mathrm{f}(x) = x^2$、$s = 1$、$t = 4$ で試すと $\mathrm{F} + \mathrm{G} = \frac{1}{3} + \frac{16}{3} = \frac{17}{3} > 4$ となる。一方、$t = 1 = \mathrm{f}(1)$ とすると $\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1 = st$ となる。

よくある間違い

- 符号を決めずに $\cos(\sin^{-1} t) = \pm\sqrt{1-t^2}$ と書いてしまうこと。$\sin^{-1}$ の値域から、符号は正である。
- $t \neq \mathrm{f}(s)$ のときに不等式が狭義になる理由を説明せず、「領域が長方形を覆う」とだけ述べること。等号成立の条件を答えるには、その説明が必要である。
- f が増加関数でなければならないことを忘れること。図はこの性質に依存している。

STEP のその先へ

不等式 $(*)$ は**ヤングの不等式**（Young's inequality）である。$\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$ とすると、$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ のもとで $st \leq \frac{s^p}{p} + \frac{t^q}{q}$ となる。これは、解析学で最もよく使われる道具の一つであるヘルダーの不等式（Hölder's inequality）を証明する際の鍵となる段階である。F と G の組合せは、ラグランジュ力学とハミルトン力学を結びつけるルジャンドル変換（Legendre transform）を早くも垣間見せるものである。これらすべての背後にある解析学については、Bartle and Sherbert, *Introduction to Real Analysis* を読んでみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。