解答例

STEP I 1987、第 5 問

純粋数学 ・ 置換積分

> **STEP I 1987、問 5**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q5

鍵となる考え方

この置換は、根号の中の二つの因数がどちらも完全平方になるように作られている。すなわち、$x-\alpha$ は $\sin^2\theta$ の定数倍に、$\beta-x$ は同じ定数の $\cos^2\theta$ 倍になる。すると根号はちょうど $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta$ と打ち消し合い、一つ目の積分は被積分関数が定数の積分に帰着する。二つ目の積分には余分な因数 $1/x$ が一つ残るが、分子と分母を $\cos^2\theta$ で割れば、$\tan\theta$ を用いた標準的な積分になる。

解答

一つ目の積分（$\alpha<\beta$ の場合）

$x=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta$ とおく。$\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ を用いると、

$$x-\alpha=\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta-\alpha(\cos^2\theta+\sin^2\theta)=(\beta-\alpha)\sin^2\theta,$$
$$\beta-x=\beta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)-\alpha\cos^2\theta-\beta\sin^2\theta=(\beta-\alpha)\cos^2\theta,$$

であり、また

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\theta}=-2\alpha\cos\theta\sin\theta+2\beta\sin\theta\cos\theta=2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta.$$

である。積分区間については、$\theta=0$ のとき $x=\alpha$、$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき $x=\beta$ となる。$(0,\frac{\pi}{2})$ 上で $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\theta>0$ であるから、θ が $[0,\frac{\pi}{2}]$ を動くとき、x は $[\alpha,\beta]$ をちょうど一度、単調に増加しながら動く。

この範囲では $\sin\theta\geq 0$ かつ $\cos\theta\geq 0$ であり、さらに $\beta-\alpha>0$ であるから、

$$\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}=(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta.$$

したがって

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}{(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} 2\,\mathrm{d}\theta = \pi,$$

となり、示すべき結果が得られた。（被積分関数は両端で発散するので、厳密にはこれは広義積分（improper integral）である。置換後の被積分関数は有界な定数 2 であるから、この置換によって積分が収束（converge）することもわかる。）

考えてみよう $\alpha < \beta$ という条件は、正確にはどこで使ったのだろうか。

平方根をとるところだけである。$\sqrt{(\beta-\alpha)^2}$ が $\beta-\alpha$ に等しいのは、まさに $\beta-\alpha>0$ だからである。一般にはこれは $|\beta-\alpha|$ であり、このことが次の小問の鍵となる。

一つ目の積分（$\alpha > \beta$ の場合）

今度は、積分は大きい方の数 α から小さい方の数 β へと向かう。両者の間の区間では $x-\alpha<0$ かつ $\beta-x<0$ であるから、積はやはり正であり、被積分関数は依然として意味をもつ。

置換はそっくりそのまま通用するが、ただ一点、今度は $\sqrt{(\beta-\alpha)^2} = \alpha-\beta$ となるので、

$$\frac{2(\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta}{(\alpha-\beta)\sin\theta\cos\theta} = -2,$$

となり、積分は

$$\int_0^{\pi/2} (-2)\,\mathrm{d}\theta = -\pi.$$

である。もっと手早く確かめる方法もある。式 $(x-\alpha)(\beta-x)$ は α と β を入れ替えても変わらないので、被積分関数は、二つの文字の役割を入れ替えた最初の場合と同じ関数である。積分区間の上端と下端を入れ替えると符号が変わるから、β を小さい方の端点として最初の結果を用いると、

$$\int_\alpha^\beta = -\int_\beta^\alpha = -\pi,$$

を得る。

二つ目の積分（$0 < \alpha < \beta$ の場合）

まったく同じ置換を行うと、同じ打ち消し合いが起こり、因数 $1/x$ だけが残る。

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}} = \int_0^{\pi/2} \frac{2\,\mathrm{d}\theta}{\alpha\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta}.$$

$\alpha, \beta > 0$ であるから、分母は $[0, \frac{\pi}{2}]$ 全体で正であり、これは通常の（広義でない）積分である。これを計算するため、分子と分母を $\cos^2\theta$ で割る（$0 \le \theta < \frac{\pi}{2}$ で有効）。

$$\int_0^{\pi/2} \frac{2\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{\alpha + \beta\tan^2\theta}.$$

ここで $t = \tan\theta$ とおくと $\mathrm{d}t = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ であり、θ が 0 から $\frac{\pi}{2}$ まで動くとき、t は 0 から ∞ まで動く。

$$\int_0^{\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{\alpha + \beta t^2} = \frac{2}{\beta}\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \alpha/\beta} = \frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\left[\arctan\left(t\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right)\right]_0^{\infty}$$
$$= \frac{2}{\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha\beta}},$$

となり、示すべき結果が得られた。$\alpha > 0$ という条件は二度必要であった。一つは $1/x$ が $[\alpha, \beta]$ の内部に特異点をもたないようにするため、もう一つは $\sqrt{\beta/\alpha}$ が実数となるようにするためである。

考えてみよう 積分の上端が ∞ になった。これは問題にならないだろうか。

問題にはならない。θ についての積分はまったく普通の積分であり、無限大の上端が現れるのは、$\theta \to \frac{\pi}{2}$ のとき $\tan\theta \to \infty$ となるからにすぎない。arctan は $\frac{\pi}{2}$ に近づくので t についての積分は収束し、$\Theta \to \frac{\pi}{2}$ としたときの $[0, \Theta]$ 上の積分の極限として、θ についての積分に等しい。

検算

- スケーリング：x, α, β をそれぞれ $kx, k\alpha, k\beta$ に置き換えると、一つ目の積分は変わらず、二つ目の積分は k で割られる。二つの答え π と $\pi/\sqrt{\alpha\beta}$ はどちらもこのとおりに振る舞う。
- $\alpha \to \beta$ とする。このとき（ごく短い）区間全体で $1/x \approx 1/\beta$ であるから、二つ目の積分はおよそ π/β になるはずであり、実際 $\pi/\sqrt{\alpha\beta} \to \pi/\beta$ である。
- 数値的には、$\alpha = 2, \beta = 7$ のとき、数値積分により二つ目の積分の値は 0.83963 となり、$\pi/\sqrt{14} = 0.83963$ と一致する。$\alpha < \beta$ を無作為に選んでも一つ目の積分はすべて π となり、端点を入れ替えると $-\pi$ となった。

よくある間違い

- $\alpha > \beta$ のときにも π と答えてしまう。被積分関数は正であるが、積分区間が逆向きなので、答えは $-\pi$ である。

- 三つの因数の符号を確かめずに $\sqrt{(\beta-\alpha)^2\sin^2\theta\cos^2\theta} = (\beta-\alpha)\sin\theta\cos\theta$ と書いてしまう。

STEP のその先へ

この置換には、きれいな幾何学的意味がある。$x = \frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\beta-\alpha}{2}\cos 2\theta$ であるから、これは $[\alpha, \beta]$ を直径とする半円をパラメータ表示しており、$\sqrt{(x-\alpha)(\beta-x)}$ は x の真上におけるその半円の高さである。二つ目の積分は、周回積分（contour integration）による積分計算への最初の入り口である。複素解析（complex analysis）では、どちらの結果も留数定理（residue theorem）から数行で導かれる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）はこのことを見事に解説しており、広義積分の丁寧な扱いについては Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）に詳しい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。