解答例

STEP I 1987、第 4 問

純粋数学 ・ 対数と等比級数

> **STEP I 1987、問 4**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q4

鍵となる考え方

扱いにくい底をもつ対数（logarithm）は、自然対数（natural logarithm）に直すのがよい。そうすれば底が単純な係数として現れるからである。ここでの底はすべて 2 の累乗であり、指数 2^n は掛け算の係数として前に下りてくる。各項を $\ln 2$ を用いて表してしまえば、この級数は姿を変えた等比級数（geometric series）にすぎない。

解答

一般項の書き換え

$n \geq 0$ を固定し、$c = \log_{2^{2^n}} \mathrm{e}$ とおく。ヒントにある定義により、これは

$$(2^{2^n})^c = \mathrm{e}$$

を意味する。両辺（いずれも正である）の自然対数をとると、

$$c \cdot 2^n \ln 2 = \ln \mathrm{e} = 1, \qquad \text{よって} \qquad \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{1}{2^n \ln 2}.$$

添字の確認として、$n = 0, 1, 2$ はそれぞれ底 2、4、16 を与え、最初の 3 項と一致する。その値は $\frac{1}{\ln 2}$、$\frac{1}{2\ln 2}$、$\frac{1}{4\ln 2}$ である。

考えてみよう 2^n はどこから出てきたのか？

規則 $\ln(a^k) = k \ln a$ を $a = 2$、$k = 2^n$ として用いたことによる。すなわち、底 2^{2^n} の自然対数は $2^n \ln 2$ である。指数の「塔」があるからこそ各底は直前の底の 2 乗になり、底を 2 乗すると対数は半分になる。

級数の和を求める

したがって、この級数は

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{1}{\ln 2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

となる。これは初項 1、公比（common ratio）$r = -\frac{1}{2}$ の等比級数である。$|r| < 1$ であるから収束（converge）し、その和は $\dfrac{1}{1-r} = \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} = \dfrac{2}{3}$ である。よって

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \log_{2^{2^n}} \mathrm{e} = \frac{2}{3\ln 2} = \frac{1}{\frac{3}{2}\ln 2} = \frac{1}{\ln(2^{3/2})} = \frac{1}{\ln(2\sqrt{2})},$$

ここでは再び $\ln(a^k) = k\ln a$ を用い、さらに $2^{3/2} = 2\cdot 2^{1/2} = 2\sqrt{2}$ を用いた。これが求める和である。

検算

数値的には $\frac{1}{\ln(2\sqrt{2})} \approx 0.96180$ である。この級数の部分和（partial sum）は 1.4427、0.7213、1.0820、0.9017、0.9919、0.9468, … であり、この値の両側を行き来しながら、差が毎回半分になっていく。これは交代する等比級数として当然のふるまいである。6o 項までとると、機械精度の範囲で 0.961797 と一致する。

よくある間違い

- $\log_{2^{2^n}}$ を $\log_{2^{2n}}$ と読み違えること。そうすると底は 2、16、256, … となり、誤った公比 $-\frac{1}{4}$ が得られてしまう。最初のいくつかの項と照らし合わせて添字を確認すること。
- $\dfrac{1}{\ln a}$ とすべきところを $\log_a \mathrm{e} = \ln a$ と書いてしまうこと。底の変換公式（change-of-base rule）により $\log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}$ であり、ここでは $\ln b = 1$ である。

STEP のその先へ

無限和がそもそも「値をもつ」かどうかは、解析学（analysis）の最初の講義における中心的な問題である。等比級数はその基本的な基準となるものであり、比判定法（ratio test）をはじめとする多くの収束判定法は、級数を等比級数と比較することによって機能する。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）は、この理論を丁寧かつ読みやすく組み立てている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。