解答例

STEP I 1987、第 3 問

純粋数学 ・ 変数分離形の微分方程式

> **STEP I 1987、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q3

鍵となる考え方

この方程式は v についてのままでは扱いにくそうに見えるが、左辺には見抜いてほしいと言わんばかりの形が現れている。$x^3v' + x^2v$ は xv の導関数（derivative）の x^2 倍なのである。したがって、示唆された置換（substitution）によって左辺は x^2y' となり、右辺を y で書き直すと、きれいに変数分離（separation of variables）ができる。あとは部分分数分解（partial fractions）と、符号の注意深い選択である。

解答

変数の変換

$y = xv$ とおくと、積の微分法（product rule）により $y' = v + xv'$ であるから、

$$x^3\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + x^2v = x^2\left(x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\right) = x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}.$$

右辺については、$x^2v^2 = y^2$ かつ $v = y/x$ であるから、右辺は

$$\frac{1+y^2}{(1+x^2)\,y/x} = \frac{x(1+y^2)}{(1+x^2)\,y}.$$

となる。よって方程式は

$$x^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x(1+y^2)}{(1+x^2)\,y}, \qquad \text{すなわち、} \qquad \frac{y}{1+y^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x(1+x^2)},$$

となる。ここでは x^3 で割り（$x = 1$ の近くで考えるので $x > 0$ である）、$y/(1+y^2)$ を掛けた。これで変数が分離された。

積分する

左辺を積分すると $\frac{1}{2}\ln(1+y^2)$ となる。右辺については、部分分数分解により

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2},$$

が得られる。これは右辺を通分すれば容易に確かめられる。したがって、$x > 0$ において

$$\tfrac{1}{2}\ln(1+y^2) = \ln x - \tfrac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \qquad \text{よって} \qquad 1+y^2 = \frac{Ax^2}{1+x^2}$$

である。ここで $A = \mathrm{e}^{2C}$ は正の定数である。

$x = 1$ のとき $v = 1$ であるから $y = 1$ でもあり、$2 = A/2$ より $A = 4$ を得る。したがって

$$y^2 = \frac{4x^2}{1+x^2} - 1 = \frac{3x^2-1}{1+x^2}, \qquad v^2 = \frac{y^2}{x^2} = \frac{3x^2-1}{x^2(1+x^2)}.$$

考えてみよう どちらの平方根をとるべきか。また、解はどの範囲で有効か。

もとの方程式では v が分母にあるので、解が $v = 0$ を通ることはありえない。解は連続であるから、$x = 1$ での符号、すなわち正の符号を保ち続ける。よって正の平方根をとる：

$$\boxed{v(x) = \frac{\sqrt{3x^2-1}}{x\sqrt{1+x^2}}}$$

これは $x > 1/\sqrt{3}$ で有効である。x が $1/\sqrt{3}$ まで減少すると v は 0 まで下がり、方程式が意味をなさなくなるので、解をその点より先へ延長することはできない。

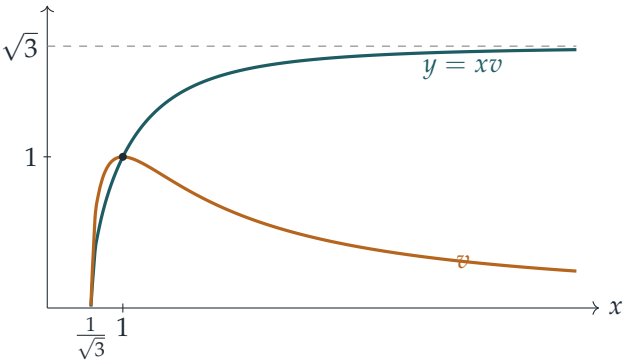
x が大きいとき

分子と分母を x^2 で割ると、

$$v(x) = \frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{3-1/x^2}}{\sqrt{1+1/x^2}} \approx \frac{\sqrt{3}}{x},$$

となるので、$x \to \infty$ のとき $v(x) \to 0$ である。言い換えれば $y = xv \to \sqrt{3}$ であり、y のグラフは水平漸近線（horizontal asymptote）$y = \sqrt{3}$ をもち、$v = y/x$ は $\sqrt{3}/x$ のように減衰する。

実は出発点が最大点になっている。$u = x^2$ とおくと、$(3u-1)/(u^2+u)$ の導関数の分子は $-(3u+1)(u-1)$ であるから、v は $x = 1$ で最大値 1 まで増加し、その後 0 に向かって減少する。



検算

- $x = 1$ において：$v = \sqrt{2}/(1 \cdot \sqrt{2}) = 1$ であり、条件を満たす。
- 代入による確認：$1 + y^2 = 4x^2/(1 + x^2)$ を陰関数微分（implicit differentiation）すると $2yy' = 8x/(1 + x^2)^2$ となり、また $(1 + y^2)/(x(1 + x^2)) = 4x/(1 + x^2)^2$ であるから、確かに $yy'/(1 + y^2) = 1/(x(1 + x^2))$ が成り立つ。
- 数値的には、もとの方程式を $(1, 1)$ からルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で数値的に解き進めると $v(10) \approx 0.172058$ となり、公式と一致する。また $x = 10^4$ では公式から $xv \approx 1.73205 \approx \sqrt{3}$ が得られる。

よくある間違い

- 極限を $\sqrt{3}$ と答えてしまう：それは y の極限であり、問われているのは v の極限で、これは 0 に収束する。
- 定数の指数をとる処理を誤る：$\ln(1 + y^2) = \ln \frac{x^2}{1+x^2} + 2C$ からは $1 + y^2 = Ax^2/(1 + x^2)$ という乗法的な定数が得られるのであって、$x^2/(1 + x^2) + 2C$ ではない。
- 平方根で $\pm$ をつけたまま決めずに終わる：条件 $v(1) = 1$ と $v = 0$ を通れないことから、正の符号に定まる。

STEP のその先へ

ここでの置換がうまくいくのは、両辺に掛け算をしたあと左辺がちょうど導関数の形になっているからであり、これは積分因子（integrating factor）や同次形方程式（homogeneous equation）の背後にあるのと同じ考え方である。符号と定義域に注意を

払う必要があったことは、解の存在と一意性の理論（existence and uniqueness theory）への最初の入り口である。与えられた点を通る解は、方程式が意味をなさなくなる場所（ここでは $v = 0$）に行き当たるまで存在し続ける。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『常微分方程式入門』）では、変数分離形の方程式と、解がどこまで延長できるかという問題が扱われている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。