解答例

STEP I 1987、第 2 問

純粋数学 ・ 円の充填と面積

> **STEP I 1987、問 2**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q2

鍵となる考え方

小さい円の中心どうしを結ぶ。それらはすべて、2 つの大きい円のちょうど中間にある半径 R の円の上にあり、正 n 角形（regular n-gon）をなす。その各辺は、隣り合う小さい円が接する点を通る。この多角形こそが、Y と呼ばれる部分（その内側）と X と呼ばれる部分（その外側）を分ける境界線である。したがって、どの面積も 3 つの単純な図形、すなわち多角形、円板、そして多角形の頂点によって切り取られる小さい円の扇形（sector）から求められる。

解答

n, R, r の関係

各小円は 2 つの大円の両方に接するので、その中心は共通の中心 O から距離 $R - r + r = R$ にある。すなわち n 個の中心はすべて半径 R の円の上にある。対称性によりそれらは等間隔に並ぶので、隣り合う中心 C_1, C_2 が O に対して張る角は $2\pi/n$ である。

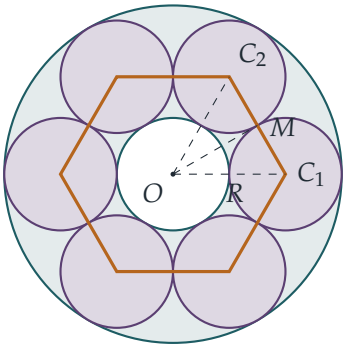
隣り合う 2 円は接するので $C_1C_2 = 2r$ である。$OC_1 = OC_2 = R$ の二等辺三角形（isosceles triangle）OC_1C_2 において、O から C_1C_2 の中点（midpoint）M へ垂線（perpendicular）を下ろすと

$$r = C_1M = R\sin\frac{\pi}{n}.$$

を得る。これが求める関係である。（$n \geq 3$ が必要である。$n = 2$ のとき内側の円の半径は $R - r = 0$ となってしまう。）同じ三角形から

$$OM = R\cos\frac{\pi}{n} = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

も得られる。



図（$n = 6$ の場合）では、中心を結んだ多角形を琥珀色で示している。その辺は、M のような隣り合う円の接点を通る。

面積 Y

この多角形は OC_1C_2 と合同（congruent）な n 個の三角形からなり、その面積はそれぞれ $\frac{1}{2} \cdot 2r \cdot \sqrt{R^2 - r^2}$ である。よって

$$\text{多角形の面積} = nr\sqrt{R^2 - r^2}.$$

多角形の内部には何があるだろうか。その内接円の半径（inradius）は $OM = \sqrt{R^2 - r^2}$ であり、$R^2 - r^2 \geq (R - r)^2$ が成り立つ。これは整理すると $2r(R - r) \geq 0$ となるからである。したがって半径 $R - r$ の内側の円板は多角形の内部にある。各頂点には小円の扇形がある。正 n 角形の内角（interior angle）は $\pi - \frac{2\pi}{n}$ であるから、このような扇形の面積はそれぞれ

$$\tfrac{1}{2}r^2\left(\pi - \frac{2\pi}{n}\right) = \pi r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right).$$

である。小円どうし、および小円と内側の円は接するだけなので、これら n 個の扇形と内側の円板は互いに重ならない。多角形から残る部分は、ちょうど内側の円に隣接する n 個の曲辺三角形であり、これらを合わせたものが Y である：

$$Y = nr\sqrt{R^2 - r^2} - \pi(R - r)^2 - n\pi r^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right),$$

これが示すべきことであった。

? **考えてみよう** なぜ辺 C_1C_2 が X と Y を分けるのにふさわしい場所なのだろうか。

辺 C_1C_2 は中心から中心へと接点 M を通って延びるので、円の間のすき間を横切ることがない。内側の円に隣接するすき間はすべてこの辺の O の側にあり、外側の円に隣接するすき間はすべて反対側にある。したがって多角形に沿って切ると 2 種類のすき

間がきれいに分かれ、しかも各小円は 2 本の半径に沿って切られる。扇形が現れるのはそのためである。

面積 X と Z

多角形の外側かつ外側の円の内側の部分からは、各小円の残りの部分を取り除く。その残りは角 $2\pi - (\pi - \frac{2\pi}{n}) = \pi + \frac{2\pi}{n}$ の優角の扇形（reflex sector）であり、面積は $\pi r^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)$ である。よって

$$X = \pi(R+r)^2 - nr\sqrt{R^2 - r^2} - n\pi r^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right).$$

半径 r の n 個の円板から

$$Z = n\pi r^2.$$

$n \to \infty$ のときの極限

足し合わせると、多角形の項は打ち消し合い、扇形の項はまとまって $n\pi r^2$ となる：

$$\begin{aligned} X + Y &= \pi(R+r)^2 - \pi(R-r)^2 - n\pi r^2 \\ &= 4\pi Rr - n\pi r^2. \end{aligned}$$

これは、当然そうあるべきとおり、円環（annulus）の面積から円の面積を引いたものにほかならない。したがって

$$\frac{X+Y}{Z} = \frac{4\pi Rr - n\pi r^2}{n\pi r^2} = \frac{4R}{nr} - 1 = \frac{4}{n\sin(\pi/n)} - 1,$$

ここで $r = R\sin(\pi/n)$ を用いた。$n \to \infty$ のとき $\pi/n \to 0$ かつ $\dfrac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \to 1$ であるから、$n\sin(\pi/n) \to \pi$ となり、

$$\frac{X+Y}{Z} \to \frac{4}{\pi} - 1 \approx 0.273.$$

である。

検算

- $n = 3$, $R = 1$ のとき $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $Y \approx 0.0646$, $X \approx 3.7497$ となる。細かい極座標の格子上で各点を「円の内部」「多角形の内部」「多角形の外部」に分類する数値積分（numerical integration）を行ったところ、$n = 3, 5, 8, 12$ について有効数字（significant figures）4 桁まで一致した。

- 比 $\frac{4}{n\sin(\pi/n)} - 1$ は $n = 10$ で 0.2944、$n = 100$ で 0.27345、$n = 1000$ で 0.273240 である。$4/\pi - 1 = 0.273240\ldots$ に近づいている。
- 発見的に考えると、n が大きいとき円は幅 $2r$ の帯の中に並んだ直径 $2r$ の円板の列のように見える。各 $2r \times 2r$ の正方形のうち円板が πr^2 を占め、すき間が $4r^2 - \pi r^2$ を占めるので、比は $(4 - \pi)/\pi$ となる。

よくある間違い

- 扇形の角として、多角形の内角 $\pi - 2\pi/n$ ではなく外角（exterior angle）$2\pi/n$ を用いてしまう。
- Y において内側の円板を取り除くことを忘れる、あるいはそれが本当に多角形の内部にあることを確かめない。

STEP のその先へ

最後の極限は、姿を変えた $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ である。これは、アルキメデス（Archimedes）が内接多角形と外接多角形の周の長さで π をはさみ込むことを可能にしたのと同じ事実である。この問題はまた、円充填（circle packing）の密度問題の簡単な模型にもなっており、ここでは細い円環のどれだけの割合を円で埋められるかを問うている。このような極限を厳密に扱うには、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門書）に挑戦してみるとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。