解答例

STEP I 1987、第 15 問

確率・統計 ・ 連続型確率変数

> **STEP I 1987、問 15**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q15

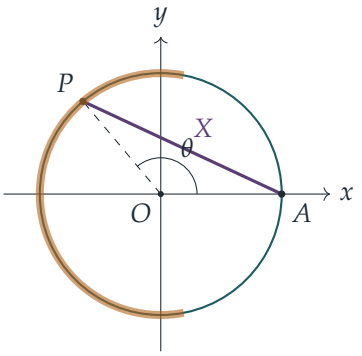
鍵となる考え方

「円周上で一様（uniform）」とは、P が中心においてなす角が一様分布（uniform distribution）に従うという意味である。したがって自然な方針は、θ を $[0, 2\pi)$ 上の一様分布として $P = (\cos\theta, \sin\theta)$ とおくことである。すると $(1, 0)$ からの距離は単位円の弦（chord）となり、半角の公式（half-angle formula）によって一つの正弦で表される。その後は、平均（mean）は一回の積分で求まり、分散（variance）はほとんど積分を必要とせず、確率は角の区間に関する問題となる。

解答

設定

O を原点とし、x 軸の正の向きから OP までの角を θ とする。円周上で P を一様に選ぶことは弧長（arc length）を一様に選ぶことであるから、θ は確率密度（density）$\frac{1}{2\pi}$ をもつ $[0, 2\pi)$ 上の一様分布に従う。$A = (1, 0)$、$P = (\cos\theta, \sin\theta)$ とおく。



このとき、$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$ を用いて

$$X^2 = (\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta = 2 - 2\cos\theta = 4\sin^2\frac{\theta}{2},$$

となる。$0 \le \frac{\theta}{2} < \pi$ より $\sin\frac{\theta}{2} \ge 0$ であるから、正の平方根をとってよい：

$$X = 2\sin\frac{\theta}{2}.$$

平均

$$\mathrm{E}(X) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\left[-4\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(4+4) = \frac{4}{\pi}.$$

よって $\mathrm{E}(X) = \dfrac{4}{\pi} \approx 1.273$ である。

分散

考えてみよう $\mathrm{E}(X^2)$ を求めるために $4\sin^2\frac{\theta}{2}$ を積分する必要があるだろうか？

その必要はない。2 乗する前の形の方が扱いやすい。$X^2 = 2 - 2\cos\theta$ であり、$\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = 0$ であるから、$\cos\theta$ の一周にわたる平均は 0 である。したがって $\mathrm{E}(X^2) = 2$ であり、

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = 2 - \frac{16}{\pi^2} \approx 0.379.$$

X が平均を超える確率

$2\sin\frac{\theta}{2} > \frac{4}{\pi}$、すなわち $\sin\frac{\theta}{2} > \frac{2}{\pi}$ となる確率を求めればよい。$0 < \frac{2}{\pi} < 1$ であるから、これには解がある。$\alpha = \arcsin\frac{2}{\pi}$ とおくと、これは $(0, \frac{\pi}{2})$ に属する。$\frac{\theta}{2}$ が $[0,\pi)$ を動く

とき、正弦は 0 から 1 まで増加したのち再び減少し、$\sin\alpha$ を超えるのはちょうど

$$\alpha < \tfrac{\theta}{2} < \pi - \alpha, \qquad \text{すなわち} \qquad 2\alpha < \theta < 2\pi - 2\alpha.$$

のときである。これは図の太い弧、すなわち円周上で A から見て反対側にある点の集まりである。θ は一様分布に従うから、求める確率はこの区間の長さを 2π で割ったものである：

$$\mathrm{P}(X > \mathrm{E}(X)) = \frac{2\pi - 4\alpha}{2\pi} = \boxed{1 - \frac{2}{\pi}\arcsin\frac{2}{\pi}} \approx 0.561.$$

検算

- X のとりうる値の範囲は $[0,2]$ であり、平均 $4/\pi \approx 1.27$ は中点 1 より大きい。これは図と整合する。円周の大きな割合において弦の長さは最大値に近く（P が反対側を通過するとき、X はゆっくりとしか変化しない）、分布は大きな値の側に偏っているからである。
- 同じ理由で、平均を超える確率は $\frac{1}{2}$ より少し大きいはずであり、実際 0.561 はそうなっている。
- 数値的には、等間隔にとった 2×10^5 個の角に対する中点則（midpoint rule）による平均から、平均 1.273240、分散 0.378861、$\mathrm{P} = 0.56066$ が得られ、10^6 点のシミュレーション（simulation）も標本誤差の範囲内で一致する。

よくある間違い

- $\theta \in (-\pi, \pi]$ として $X = 2\sin\frac{\theta}{2}$ とすること。この場合 $\sin\frac{\theta}{2}$ は負になりうるので、$X = 2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|$ としなければならない。$[0, 2\pi)$ を用いれば絶対値を避けられる。
- P の x 座標が $[-1,1]$ 上の一様分布に従うとみなすこと。円周上で一様とは、x についてではなく、角（弧長）について一様という意味である。

STEP のその先へ

これは確率変数の変換（transformation of a random variable）の最初の例である。X の確率密度関数は $[0,2]$ 上で $f(x) = \dfrac{2}{\pi\sqrt{4-x^2}}$ であり、これは逆正弦型の分布（arcsine law）である。上で求めたすべての答えはこの密度関数から導き直すことができる。またこの問題は、「無作為に」という言葉がいかに捉えにくいものであるかも示唆している。円の弦を無作為に選ぶ方法として自然なものがいくつもあり、それぞれ異なる答

えを与えるのである（ベルトランの逆説（Bertrand's paradox））。どちらの考え方も Blitzstein と Hwang の *Introduction to Probability*（確率論入門）で展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。