解答例

STEP I 1987、第 14 問

確率・統計 ・ 確率の等比級数

> **STEP I 1987、問 14**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q14

鍵となる考え方

第 1 試合が終わると、未決着（undecided）のトーナメントにはもはや自由度がまったく残らない。各試合の勝者は審判（referee）と対戦し、トーナメントが未決着のまま続くためには審判が勝たなければならないので、次の勝者は強制的に決まる。したがって、すべては第 1 試合の勝者と、ある選手が初めて 2 連勝するただ一つの時点によって決まる。すると確率は、周期（period） 3 で循環する等比級数（geometric series）に帰着する。

解答

以下を通じて、各試合では前の試合の勝者がその試合の審判と対戦する。前の試合の敗者は審判として休み、その試合には**勝つことができない**。

小問 (i)

第 1 試合では A が B に勝ち、B が第 2 試合の審判を務める。第 2 試合は A 対 C で、C が勝つ。これは起こりうる。第 3 試合は C 対 B で、B が勝つ。これも起こりうる。しかし誰も 2 連勝していないので、ACB の後もトーナメントは未決着であり、続けなければならない。よって ACB は完結したトーナメントの記録では**ない**（それはトーナメントの始まりにすぎない）。

小問 (ii)

A が第 1 試合に勝つと、第 2 試合は B を審判として A 対 C となる。よって B は第 2 試合に勝てず、ABB は**起こりえない**。

小問 (iii)

(i) と同様に最初の 3 試合 ACB は起こりうり、第 3 試合は A を審判とする C 対 B であった。よって第 4 試合は B 対 A であり、B はこれに勝つことができる。このとき B は第 3 試合と第 4 試合に連勝したので、トーナメントは終了する。よって $ACBB$ は完結したトーナメント**である**。これは B が 4 試合で優勝するものである。

5 試合後に未決着である確率

X が第 1 試合に勝つとする。ここで X は A または B であり、もう一方を Y とする。トーナメントが未決着のまま続くためには、各試合は直前の勝者**でない**選手が勝たなければならず、それは直前の審判以外にありえない。これにより記録は

$$XCYXCYX\ldots$$

と強制される。新しい勝者はいずれも直前の試合の審判だからである。具体的には、第 2 試合は X 対 C（審判は Y）なので C が勝たなければならない。第 3 試合は C 対 Y（審判は X）なので Y が勝たなければならない。第 4 試合は Y 対 X なので X が勝たなければならず、以下同様に周期 3 で続く。

第 1 試合はどちらが勝ってもよい。その後、未決着の状態を保つ各試合は確率 $\frac{1}{2}$ で起こる。試合は互いに独立で、各選手の勝つ確率は五分五分だからである。よって

$$P(n\text{ 試合後に未決着}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1}, \qquad P(5\text{ 試合後に未決着}) = \tfrac{1}{16}.$$

誰がいつ優勝するか

トーナメントが第 n 試合（$n \geq 2$）で終わるのは、$n-1$ 試合後に未決着であり、かつ第 $n-1$ 試合の勝者が再び勝つときである。この確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。優勝者は第 $n-1$ 試合の勝者、すなわち強制される列の第 $(n-1)$ 文字である。$k = n-1$ とおく。すると次のようになる。

$k \bmod 3$	1	2	0
第 1 試合を A が勝った場合の優勝者	A	C	B
第 1 試合を B が勝った場合の優勝者	B	C	A

よってトーナメントは確率 $\left(\frac{1}{2}\right)^k$ で第 $k+1$ 試合に終わる。$k \equiv 2 \pmod 3$ ならば、こ

の確率はすべて C のものとなる。そうでなければ A と B で等分され、それぞれ $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ ずつとなる。

> **考えてみよう** なぜ $k \equiv 2$ のときには C が確率をすべて得るのに、それ以外のときには半分しか得られないのだろうか。

第 1 試合の勝者が誰であっても、C は常に強制される列の 2 番目の文字である。よって 2 つの場合のどちらでも、同じ時点で C が優勝する。一方 A と B は 2 つの場合で役割が入れ替わるので、それぞれは自分がその位置を占める場合の分しか得られない。

5 試合以内に優勝する確率

ここでは $n = 2,3,4,5$、すなわち $k = 1,2,3,4$ である。

$$
\begin{aligned}
P(A \text{ が優勝、試合数} \leq 5) &= \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{k=1} + \underbrace{\tfrac{1}{16}}_{k=3} + \underbrace{\tfrac{1}{32}}_{k=4} = \tfrac{11}{32}, \\
P(B \text{ が優勝、試合数} \leq 5) &= \tfrac{11}{32} \quad (A \text{ と } B \text{ の対称性より}), \\
P(C \text{ が優勝、試合数} \leq 5) &= \underbrace{\tfrac{1}{4}}_{k=2}.
\end{aligned}
$$

確認として、$\frac{11}{32} + \frac{11}{32} + \frac{8}{32} = \frac{15}{16} = 1 - \frac{1}{16}$ であり、これは 5 試合後に未決着である確率と整合する。

最終的な優勝者

$P(\text{undecided after } n \text{ games}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \to 0$（$n$ 試合後に未決着である確率）であるから、トーナメントは確率 1 で終了する。よって $k \geq 1$ のすべてにわたって足し合わせればよい。各剰余類（residue class）は公比 $\frac{1}{8}$ の等比級数を与える。

$$
\begin{aligned}
P(C \text{ が優勝}) &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{256} + \cdots = \frac{1/4}{1 - 1/8} = \frac{2}{7}, \\
P(A \text{ が優勝}) &= \underbrace{\left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{32} + \cdots\right)}_{k \equiv 1} + \underbrace{\left(\tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{128} + \cdots\right)}_{k \equiv 0} = \frac{1/4}{7/8} + \frac{1/16}{7/8} = \frac{2}{7} + \frac{1}{14} = \frac{5}{14},
\end{aligned}
$$

となり、題意が示された。対称性（symmetry）より $P(B \text{ が優勝}) = \frac{5}{14}$ でもあり、実際 $\frac{5}{14} + \frac{5}{14} + \frac{2}{7} = 1$ である。

したがって、第 1 試合を休む C は不利である。ほかの 2 人がそれぞれ $\frac{5}{14} \approx 0.357$ であるのに対し、$\frac{2}{7} \approx 0.286$ にとどまる。

検算

- 5 試合以内に優勝する 3 つの確率の和は $\frac{15}{16}$ であり、最終的な優勝確率の和は 1 である。
- 起こりうるすべての試合列を分数を用いて厳密に数え上げる（enumeration）と、$\frac{1}{16}$、$\frac{11}{32}$、$\frac{11}{32}$、$\frac{1}{4}$ が確かめられる。60 試合まで計算すると、A と B については 0.357142…、C については 0.285714… となる。
- C についての手早い別解：C が優勝する確率を c とする。第 1 試合の後、C は確率 $\frac{1}{4}$ で直ちに優勝する。3 試合後に同じ状況に戻った場合（確率 $\frac{1}{8}$）は最初からやり直しとなるので、$c = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}c$ であり、$c = \frac{2}{7}$ を得る。

よくある間違い

- ACB を正しい記録だとしてしまう。その中の各試合は起こりうるが、誰も 2 連勝していないので、トーナメントは終わっていない。
- 直前の敗者が審判を務めるので次の試合に勝てない、ということを忘れる（これにより ABB が除外される）。
- $k \equiv 2$ のときに C に確率の半分しか与えない。C はその時点で**どちらの**場合にも優勝する。

STEP のその先へ

このトーナメントはマルコフ連鎖（Markov chain）である。各試合後の状態は単に「直前に誰が勝ち、誰が審判をしているか」であり、連鎖が吸収（absorption）されたときに優勝者が決まる。検算の節で用いた第一ステップ解析（first-step argument）、すなわち次に起こることで条件づけて確率についての方程式を立てる方法は、吸収確率を求める標準的な方法であり、級数の和を計算せずに済む。Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）は、大学 1 年次の水準でマルコフ連鎖と吸収を導入している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。