解答例

STEP I 1987、第 13 問

力学 ・ 変化する力

> **STEP I 1987、問 13**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q13

鍵となる考え方

力の法則は $x = 0$ で切り替わるので、運動はいくつかの段階に分かれ、各段階は単純な線形微分方程式（linear differential equation）に支配される。正の側では、力は変位に比例する復元力（restoring force）であり、これは単振動（simple harmonic motion）である。負の側では、力は速度に比例する抵抗（resistance）であり、速さは指数関数的に減衰する。ある段階の終わりにおける位置と速度が、次の段階の初期条件（initial conditions）になる。本当の問題は段階がいくつあるか、すなわち粒子が再び戻ってくることがあるのかどうかである。

解答

モデル

物体を、与えられた力のみを受けて x 軸上を運動する質点とみなし、$\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$ と書く。ニュートン（Newton）の運動の第 2 法則 $m\ddot{x} = \mathrm{F}$ より

$$\ddot{x} = -\mu^2 x \quad (x \geq 0), \qquad\qquad \ddot{x} = -\kappa\dot{x} \quad (x < 0).$$

を得る。質量は約分されて消えるので、答えには関係しない。

第 1 段階：$x \geq 0$ における単振動

$v_0 > 0$ であるから、粒子はただちに $x > 0$ に入り、そこでは $\ddot{x} = -\mu^2 x$ である。これは角振動数（angular frequency）μ の単振動であり、その一般解（general solution）は

$$x = A\cos\mu t + B\sin\mu t.$$

である。$t = 0$ で $x = 0$ という条件から $A = 0$ が得られ、$t = 0$ で $\dot{x} = B\mu = v_0$ から $B = v_0/\mu$ が得られる。よって

$$x = \frac{v_0}{\mu}\sin \mu t, \qquad \dot{x} = v_0 \cos \mu t.$$

となる。これは $x \geq 0$ である間、すなわち $\sin \mu t \geq 0$ である間、つまり $0 \leq t \leq \pi/\mu$ において成り立つ。粒子は $t = \pi/(2\mu)$ で最大変位 v_0/μ に達し、

$$t = T = \frac{\pi}{\mu}, \qquad \text{のとき、速度} \qquad \dot{x} = v_0 \cos \pi = -v_0.$$

で原点に戻る。この側ではエネルギーが保存される（力 $-m\mu^2 x$ はポテンシャルエネルギー（potential energy）$\frac{1}{2}m\mu^2 x^2$ から導かれ、これは原点で 0 である）ので、粒子は出発時と同じ速さで戻ってくる。

第 2 段階：$x < 0$ における抵抗を受ける運動

粒子は速度 $-v_0$ で $x < 0$ に入り、そこでは $\ddot{x} = -\kappa\dot{x}$ である。$u = \dot{x}$ とおくと、これは 1 階の方程式 $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t = -\kappa u$ であり、$t = T$ で $u = -v_0$ を満たす解は

$$\dot{x} = -v_0\, \mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}.$$

である。$t = T$ で $x = 0$ として積分すると

$$x = \int_T^t -v_0\, \mathrm{e}^{-\kappa(s-T)}\, \mathrm{d}s = -\frac{v_0}{\kappa}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}\right).$$

考えてみよう 粒子は再び $x \geq 0$ に戻って、第 3 段階が始まることがあるだろうか？

ない。速度 $-v_0\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)}$ はすべての $t > T$ で負であるから、この段階を通じて x は減少し続ける。したがって、すべての $t > T$ で x は厳密に負であり、上の式は永久に成り立つ。抵抗は粒子を減速させるが、決して向きを反転させることはない。$t \to \infty$ のとき $\mathrm{e}^{-\kappa(t-T)} \to 0$ であるから、粒子は点 $x = -v_0/\kappa$ に限りなく近づくが、決して到達しない。

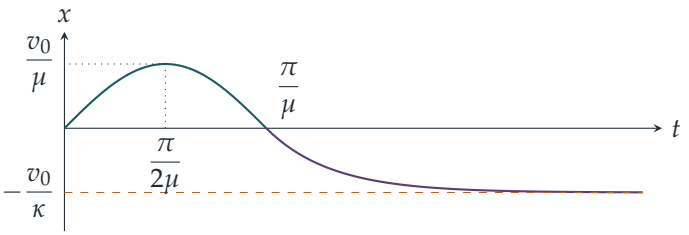
答え

$$x = \begin{cases} \dfrac{v_0}{\mu}\sin \mu t, & 0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{\mu}, \\ -\dfrac{v_0}{\kappa}\left(1 - \mathrm{e}^{-\kappa(t-\pi/\mu)}\right), & t > \dfrac{\pi}{\mu}. \end{cases}$$

どちらの式も $t = \pi/\mu$ で $x = 0$ かつ $\dot{x} = -v_0$ となるので、グラフはそこで滑らかにつながる（傾きが連続である）。ただし $\ddot{x}$ は 0 から κv_0 へと不連続に跳ぶ。

概形

グラフは、軸の上側にある正弦曲線の半分のアーチと、それに続いて原点から同じ傾き $-v_0$ で出発し、漸近線（asymptote）$x = -v_0/\kappa$ に向かって平らになっていく曲線からなる。（図では $\mu = 1$、$\kappa = 1$ としている。）



一般には、山の高さ v_0/μ と漸近線の深さ v_0/κ は互いに独立である。抵抗が弱い（κ が小さい）と、粒子は左へ遠くまで流れていく。

検算

- 単位：μ と κ はどちらも単位 s^{-1} をもつので、v_0/μ と v_0/κ は長さであり、そうでなければならない。
- 極限の場合：$\kappa \to 0$ のとき抵抗はなくなり、実際 $-\frac{v_0}{\kappa}(1 - \mathrm{e}^{-\kappa s}) \to -v_0 s$ となって、速さ v_0 の等速運動になる。
- 数値計算：$\mu = 1.7$、$\kappa = 0.9$、$v_0 = 2.2$ として運動方程式をルンゲ＝クッタ法（Runge–Kutta method）で数値的に解くと、$0 \le t \le 15$ において式と 3×10^{-5} 以内で一致した。粒子は $x = 1.2941 = v_0/\mu$ で最大となり、$x = -2.4444 = -v_0/\kappa$ に落ち着いた。

よくある間違い

- 第 2 段階の時間を $t = \pi/\mu$ からではなく $t = 0$ から測ってしまうこと。指数は $-\kappa(t - \pi/\mu)$ でなければならない。
- 粒子が再び $x \ge 0$ に入るかどうかの確認を忘れること。問題はその後の運動の**すべて**を求めているので、第 3 段階が存在しないという主張には 1 行の根拠が必要である。

STEP のその先へ

ここでは力が $x = 0$ の両側で異なる線形の式で表される、区分線形系（piecewise-linear system）になっている。切り替え点で位置と速度を一致させて解をつなぎ合わせる手法は、微分方程式の最初の講義でこのような系（さらに衝突や摩擦の問題）を扱う標準的な方法である。両方の項を同時に加えた $\ddot{x} + \kappa\dot{x} + \mu^2 x = 0$ は減衰振動子（damped harmonic oscillator）を与え、その不足減衰（underdamped）、臨界減衰（critically damped）、過減衰（overdamped）の各領域は、どの力学の入門講義でも中心的な例である。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、減衰振動子を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。