解答例

STEP I 1987、第 12 問

力学 ・ はね返りのある放物運動

> **STEP I 1987、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q12

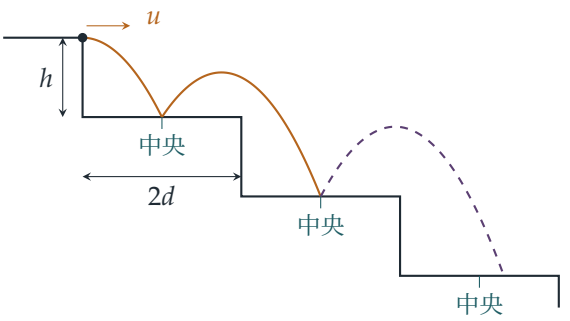
鍵となる考え方

はね返りとはね返りの間、粒子は放物運動をする物体（projectile）である。また（段がなめらかであれば）はね返りによって変わるのは速度の鉛直成分だけで、その向きが反転し大きさが定数倍される。したがって水平方向の速さは決して変わらない。つまり、水平距離によって各飛行の時間が決まり、その飛行時間と段 1 つ分の落差によって鉛直方向の速さが決まる。すべてを最初の落下にかかる時間を単位として測ることができ、そのおかげで計算はごくわずかで済む。

解答

モデル

粒子を質点（point mass）とみなし、空気抵抗を無視する。段はなめらか（smooth）かつ水平であるとする。すると衝突によって水平方向の速度は変わらず、鉛直方向の速度は $-e$ 倍される。粒子が水平方向の速さ u で蹴り出されるとし、最初の飛行の時間を t_1 とする。



実線の弧は最初の 2 回の飛行であり、破線の弧はその次に実際に起こる運動である（最後の部分を参照）。

反発係数（coefficient of restitution）

最初の飛行。粒子は鉛直方向の速度 0 で出発し、h だけ落下し、水平方向に d だけ進む（段の幅の半分であり、最初の段の中央まで）。よって

$$h = \tfrac{1}{2}gt_1^2, \qquad d = ut_1.$$

粒子は下向きの鉛直方向の速さ gt_1 で最初の段に当たり、上向きの鉛直方向の速さ egt_1 ではね返る。水平方向の速さは u のままである。

2 回目の飛行。最初の段の中央から 2 番目の段の中央までは、水平距離 $2d$ である。水平方向の速さは依然として $u = d/t_1$ なので、この飛行にかかる時間は

$$T = \frac{2d}{u} = 2t_1.$$

この時間の間に、粒子はちょうど h だけ低い位置に到達しなければならない。上向きを正とすると

$$\begin{aligned} -h &= (egt_1)(2t_1) - \tfrac{1}{2}g(2t_1)^2 \\ &= (2e-2)\,gt_1^2 \\ &= (2e-2)(2h), \end{aligned}$$

ここで $gt_1^2 = 2h$ を用いた。両辺を h で割ると $-1 = 4e - 4$ となるので

$$e = \tfrac{3}{4}.$$

（この飛行で粒子が最初の段の端の上を通過するとき、その段から $egt_1 \cdot t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}h$ の高さにあるので、確かに端を越える。）

この運動は続けられるか

考えてみよう このパターンが続くとしたら、それ以降の飛行はどれもどのようなものでなければならないか。

ある段の中央から次の段の中央までの飛行はどれも、水平方向に $2d$ を速さ u で進むので、いずれも時間 $2t_1$ かかり、ちょうど h だけ落下しなければならない。すると上の計算から、各はね返りの直後の上向きの鉛直方向の速さ w は

$$-h = w(2t_1) - 2gt_1^2 = 2wt_1 - 4h, \qquad \text{よって} \qquad w = \frac{3h}{2t_1} = \tfrac{3}{4}gt_1.$$

を満たさなければならない。したがって、どのはね返りの後も粒子は鉛直方向の速さ $\frac{3}{4}gt_1$ ではね返らなければならない。$e = \frac{3}{4}$ であるから、どの段にもちょうど鉛直方向の速さ gt_1 で到達しなければならない。

これは最初の段では成り立つが、2 番目の段では成り立たない。時間 $2t_1$ の飛行の後に 2 番目の段に到達したときの鉛直方向の速度は

$$\tfrac{3}{4}gt_1 - g(2t_1) = -\tfrac{5}{4}gt_1,$$

であるから、粒子は 2 番目の段に gt_1 ではなく下向きの速さ $\frac{5}{4}gt_1$ で当たり、上向きの速さ $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}gt_1 = \frac{15}{16}gt_1 > \frac{3}{4}gt_1$ ではね返る。したがって**不可能である**。粒子がすべての段の中央に当たることはできない。実際、粒子は 3 番目の段の中央を越えてしまう。3 回目の飛行の時間を st_1 とすると

$$-h = \tfrac{15}{16}gt_1(st_1) - \tfrac{1}{2}gs^2t_1^2 \quad\Longrightarrow\quad s^2 - \tfrac{15}{8}s - 1 = 0 \quad\Longrightarrow\quad s = \frac{15+\sqrt{481}}{16} \approx 2.31,$$

となるので、粒子は水平方向に約 $2.31d$ 進み、3 番目の段の中央から約 $0.31d$ 先に着地する（向こう側の端までは $3d$ あるので、まだその段の上である）。

検算

- $e = \frac{3}{4}$ は g、h、d に依存しないが、これは当然である。階段全体を拡大・縮小しても、軌道の形は何も変わらない。
- $g = 9.8$、$h = d = 1$、$e = 0.75$ として数値シミュレーションを行うと、粒子は $x = 1.000$ と $x = 3.000$（最初の 2 段の中央）に着地し、次に $x \approx 5.308$ に着地する。これは上で予測した $3 + 2.308$ と一致する。
- はね返りがなければ（$e = 0$）、2 回目の飛行では時間 $2t_1$ の間に $4h$ 落下することになる。はね返りによってそのうち $3h$ を補わなければならないので $2t_1 \cdot w = 3h$ となり、求めた結果と一致する。

よくある間違い

- 最初の水平距離を d ではなく $2d$ としてしまう。粒子は端から出発し、最初の段の中央に着地する。
- はね返りの際に水平方向の速さを変えてしまう。なめらかな面では力積（impulse）は鉛直方向なので、変わるのは鉛直成分だけである。
- 各飛行が同じに見えるからといって「可能である」と結論してしまう。到達時の速さが大きくなっていくので、はね返りも大きくなっていく。

STEP のその先へ

はね返る粒子は**離散力学系**（discrete dynamical system）の簡単な例である。あるはね返りの直後の状態が、決まった写像によって次のはね返りの後の状態を定める。運動が繰り返されうるかを問うことは、その写像の不動点（fixed point）を求めることにほかならない。ここでは不動点（はね返りの速さ $\frac{6}{7}gt_1$ で、これでは $\frac{4}{7}h$ しか低い位置に着地しない）が階段と両立しないので、この階段に合う周期運動（periodic motion）は存在しない。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、衝突と力積を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。