解答例

STEP I 1987、第 11 問

力学 ・ 円運動とエネルギー

STEP I 1987、問 11

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：

step.maths.org/questions/87-s1-q11

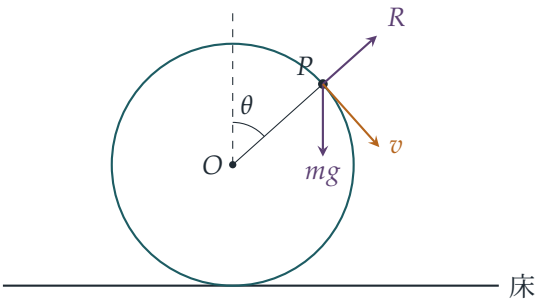
鍵となる考え方

粒子が球面上にある間は円運動をするので、二つの方程式が運動を支配する。エネルギー保存則（conservation of energy）から速さが求まり、半径方向のニュートン（Newton）の第 2 法則（Newton's second law）から垂直抗力（normal reaction）が求まる。接触が失われるのは、ちょうど垂直抗力が 0 になるときである。その後、粒子は放物運動（projectile motion）をするので、水平方向の速度は変わらない。このことと、床に達するまでの全運動に対するエネルギー保存則を組み合わせれば、軌道を求めなくても鉛直方向の速度が得られる。

解答

モデル

粒子を質点（point mass）とみなし、中心が O で床からの高さが r の、なめらかな固定された球（球は床の上に置かれている）の上にあるとする。「そっとずらす」とは、粒子が頂上から無視できるほど小さい速さで動き始めることを意味する。粒子を P とし、OP と鉛直上向きのなす角を θ、粒子の速さを v とする。はたらく力は重力 mg と、OP に沿って外向きにはたらく垂直抗力 R だけである。



接触が失われる位置

粒子は高さ $r - r\cos\theta$ だけ落下しているので、エネルギー保存則より（垂直抗力は運動の向きに垂直なので仕事をしない）

$$\tfrac{1}{2}mv^2 = mgr(1-\cos\theta), \qquad \text{よって} \qquad v^2 = 2gr(1-\cos\theta).$$

接触している間、粒子は半径 r の円周上を運動するので、O に向かう加速度は v^2/r である。O に向かう方向に力を分解すると

$$mg\cos\theta - R = \frac{mv^2}{r} = 2mg(1-\cos\theta), \qquad \text{よって} \qquad R = mg(3\cos\theta - 2).$$

頂上では $R = mg > 0$ であり、θ が増加すると R は減少する。接触が失われるのは $R = 0$ のとき、すなわち

$$\cos\theta = \tfrac{2}{3}, \qquad v^2 = \tfrac{2}{3}gr.$$

のときである。

考えてみよう 速度が水平となす角はどの角か。

速度は円の接線（tangent）方向を向いており、接線は半径 OP に垂直である。半径は鉛直と角 θ をなすので、接線は水平と同じ角 θ をなす（両方の直線を直角だけ回転させればよい）。したがって、球から離れる瞬間、粒子は水平より下向きに角

$$\cos^{-1}\tfrac{2}{3} \approx 48.2^\circ$$

をなして運動している。

床に当たるとき

離れる瞬間の速度の水平成分は

$$v\cos\theta = \sqrt{\tfrac{2}{3}gr}\cdot\tfrac{2}{3}, \qquad \text{よって} \qquad (v\cos\theta)^2 = \tfrac{8}{27}gr.$$

である。それ以降はたらく力は重力だけなので、粒子が床に達するまでこの水平成分は変わらない。（粒子が再び球に触れることはない。R が負になるはずの時点では、球面は粒子が落ちるよりも速く遠ざかるように曲がっており、粒子は O を通る鉛直線から水平距離およそ $1.46r$ の位置に着地するので、球からは十分離れている。）

次に、頂上（高さ $2r$）で静止している状態から床に達するまでの全運動にエネルギー保存則を適用する。粒子が床に当たるときの速さを V とすると

$$\tfrac{1}{2}mV^2 = mg(2r), \qquad \text{よって} \qquad V^2 = 4gr.$$

衝突時の速度の鉛直成分を V_y とすると、$V^2 = (v\cos\theta)^2 + V_y^2$ であるから

$$V_y^2 = 4gr - \tfrac{8}{27}gr = \tfrac{100}{27}gr, \qquad V_y = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{gr}{3}}.$$

したがって、床に当たるときの運動量（momentum）の鉛直成分の大きさは

$$mV_y = \frac{10m}{3}\sqrt{\frac{gr}{3}} = \frac{10m\sqrt{3gr}}{9},$$

であり、向きは下向きである。

検算

- 放物運動を直接用いる方法：粒子は高さ $r + r\cos\theta = \tfrac{5}{3}r$ で、下向きの鉛直方向の速さ $v\sin\theta$ で離れる。ここで $\sin\theta = \tfrac{\sqrt{5}}{3}$ なので $(v\sin\theta)^2 = \tfrac{10}{27}gr$ である。さらに $\tfrac{5}{3}r$ 落下すると $2g\cdot\tfrac{5}{3}r = \tfrac{90}{27}gr$ が加わり、やはり $V_y^2 = \tfrac{100}{27}gr$ が得られる。
- $V_y^2 = \tfrac{100}{27}gr \approx 3.70gr$ は $V^2 = 4gr$ より少し小さい。エネルギーの一部が水平方向の運動に残るので、そうでなければならない。
- 運動を数値的に追跡すると（$g = 9.81$、$r = 1.3$、$m = 2$ として）、接触が失われるのは $48.19°$ で、鉛直方向の運動量は 13.745 となり、$\tfrac{10m\sqrt{3gr}}{9}$ と一致する。また、軌道は球の外側にとどまる。

よくある間違い

- 落下の高さを球の頂上からではなく床から測ってしまう。球面上での落下の高さは $r(1-\cos\theta)$ である。
- 離れた後は水平方向の速度が一定であることを忘れ、運動エネルギーがすべて鉛直方向であるかのように $V_y^2 = 4gr$ と書いてしまう。
- 速度が水平と角 $90° - \theta$ をなすとしてしまう。それは接線ではなく半径の角である。

STEP のその先へ

「垂直抗力が 0 になるとき接触が失われる」という条件は、**拘束力**（constraint force）の最初の例である。拘束力とは、粒子を面の上にとどめるように自らを調整する力であり、押すことしかできない。ラグランジュ力学（Lagrangian mechanics）では、このような拘束は最初から組み込まれており、垂直抗力はラグランジュ（Lagrange）の未定乗数（Lagrange multiplier）として現れる。Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、円運動とエネルギーを用いた解法を一段上のレベルで練習するのに最適な本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。