解答例

STEP I 1987、第 10 問

力学 ・ 弾性ひも

> **STEP I 1987、問 10**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q10

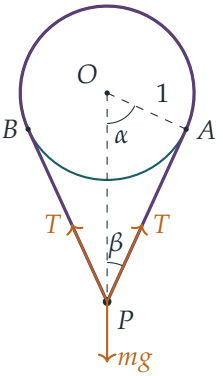
鍵となる考え方

質点がバンドの下側を円柱から引き下ろすので、バンドは二つの部分からなる。上側で円柱に沿って巻きついたままの弧と、円柱から**接線**（*tangent*）**に沿って**離れて質点で交わる二本の直線部分である。すると伸びた長さは純粋に幾何の問題となる。直角三角形から直線部分の長さと、軸において張る角が求まる。円柱はなめらか（smooth）なので、張力（tension）はバンド全体で一定であり、質点での力の分解によってその張力が mg と結びつく。あとはフックの法則（Hooke's law）から λ が得られる。

解答

モデル化

バンドを、フックの法則に従う自然長（natural length）2π の軽い弾性ひも（elastic string）とみなし、円柱（cylinder）はなめらか、質点（particle）は大きさのない点とする。鉛直な断面で考える。円柱は中心 O が軸上にある単位円であり、質点は O の鉛直下方、距離 x の点 P にある。バンドがそもそも円柱から離れるためには $x > 1$ でなければならない。



O を通る鉛直線に関する対称性から、バンドは左右に一つずつある二点 A、B で円柱から離れる。なめらかな曲線から離れるぴんと張ったひもは、その接線に沿って離れるので、PA は A において円に接する。すなわち $OA \perp AP$ である。$\alpha = \angle AOP$、$\beta = \angle APO$ とおく。

伸びた長さ

三角形 OAP は A で直角をなし、$OA = 1$、斜辺 $OP = x$ である。したがって

$$AP = \sqrt{x^2 - 1}, \qquad \cos\alpha = \frac{1}{x}, \qquad \sin\beta = \frac{1}{x}.$$

バンドは、下側を通って A から B に至る部分、すなわち O における角 2α の部分を除いて、至るところで円柱に接している。よって接している弧が張る角は $2\pi - 2\alpha$ であり、単位円上なのでその長さは $2\pi - 2\alpha$ である。二本の直線部分を加えると、伸びた長さは

$$\boxed{L = 2\sqrt{x^2 - 1} + 2\pi - 2\arccos\frac{1}{x}}$$

となる。ここで $x > 1$ であるから、$\arccos(1/x)$ は 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間にある。したがって伸びは

$$L - 2\pi = 2\sqrt{x^2 - 1} - 2\arccos\frac{1}{x}.$$

である。

考えてみよう バンドは円柱に沿って曲がっている。なぜ直線部分の張力は弧の部分の張力と等しいのだろうか。

なめらかな面に接しているバンドの微小部分には、円柱から面に垂直な力しかはたらかないので、バンドに沿った張力の変化を釣り合わせるものが何もない。したがって張力 T はバンド全体で一定であり、フックの法則はバンド全体に対して適用できる。

$$T = \frac{\lambda\,(L - 2\pi)}{2\pi}.$$

（円柱が粗い面であれば、張力は弧に沿って変化しうるので、この段階は成り立たない。）

質点の釣り合い

質点には重力 mg と、PA、PB に沿った張力 T がはたらき、それぞれ鉛直上向きと角 β をなす。水平成分は対称性により打ち消し合う。鉛直方向に分解すると

$$2T\cos\beta = mg, \qquad \text{ただし} \qquad \cos\beta = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x},$$

であるから

$$T = \frac{mgx}{2\sqrt{x^2-1}}.$$

$x = 2$ の場合

このとき $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ なので $\alpha = \frac{\pi}{3}$ であり、$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{3}$ である。伸びた長さは

$$L = 2\sqrt{3} + 2\pi - \frac{2\pi}{3} = 2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3}, \qquad \text{よって} \qquad L - 2\pi = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}.$$

張力は $T = \dfrac{2mg}{2\sqrt{3}} = \dfrac{mg}{\sqrt{3}}$ である。フックの法則より

$$\lambda = \frac{2\pi T}{L-2\pi} = \frac{2\pi mg/\sqrt{3}}{2\sqrt{3} - 2\pi/3} = \frac{2\pi mg}{6 - 2\pi/\sqrt{3}} = \frac{\pi mg}{3 - \pi/\sqrt{3}},$$

となり、分母と分子に $\sqrt{3}$ を掛けて

$$\boxed{\lambda = \frac{\sqrt{3}\,\pi\, mg}{3\sqrt{3} - \pi} \approx 2.65\, mg.}$$

検算

- $x \to 1^+$ のとき $\arccos(1/x) \to 0$、$\sqrt{x^2-1} \to 0$ なので $L \to 2\pi$ となる。バンドはちょうど円柱の最下部に触れていて伸びておらず、当然の結果である。一方 $T \to \infty$ となるが、これはほぼ水平な二本のひもで重りを支えるには非常に大きな張力が必要であるという事実と合っている。
- $x = 2$ のとき $L = 2\sqrt{3} + 4\pi/3 \approx 7.653$ であり、$2\pi \approx 6.283$ より少し大きい。また λ は mg と同じく力の次元をもつ。
- 別の方法として、$\lambda \approx 2.6484\, mg$ のもとで全位置エネルギー（potential energy）$-mgx + \lambda(L-2\pi)^2/(4\pi)$ を数値的に最小化した。最小値は $x = 2$ でとられ、幾何の計算と張力の計算の両方が確かめられる。

よくある間違い

- 直線部分を P から水平な直径の両端までとしてしまうこと。バンドは接線に沿って離れるので、軸の高さより下で、鉛直下向きから角 $\alpha = \arccos(1/x)$ の位置で円柱から離れる。
- フックの法則に直線部分一本の伸びを用いてしまうこと。張力は一様なので、用いるべきはバンド全体の伸び $L - 2\pi$ を全体の自然長 2π で割ったものである。

STEP のその先へ

なめらかな面のまわりで張力が一定であるという主張は、キャプスタン方程式（capstan equation）の摩擦がない場合にあたる。摩擦係数（coefficient of friction）が μ のとき、角 θ にわたって巻きついたロープの張力は最大で $e^{\mu\theta}$ 倍まで変化しうる。杭に数回巻きつけたロープで船をつなぎとめられるのはこのためである。また、上のエネルギーによる検算は、釣り合いの位置を位置エネルギーの停留点（stationary point）としてとらえる、力学の変分的（variational）な見方への最初の一歩でもある。このような考え方で力、摩擦、位置エネルギーを扱う大学 1 年生向けの教科書として、Kleppner と Kolenkow による *An Introduction to Mechanics*（力学入門）を読むとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。