解答例

STEP I 1987、第 1 問

純粋数学 ・ 曲線の概形

> **STEP I 1987、問 1**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は STEP Support Programme の問題データベースにある：
>
> step.maths.org/questions/87-s1-q1

鍵となる考え方

積の微分法（product rule）で微分すると、決して零にならない因子 e^{ax} と、$\cos bx$ と $\sin bx$ の組合せとの積が残る。したがって停留点（stationary point）はただ一つの方程式 $\tan bx =$ 定数 から得られ、その解は間隔 π/b で等間隔に並ぶ。ある停留点から次の停留点へ移ると、指数関数には一定の因子が掛かり、余弦の符号は反転する。これはまさに等比数列（geometric progression）である。

解答

停留点

積の微分法により、

$$\mathrm{f}'(x) = a\mathrm{e}^{ax}\cos bx - b\mathrm{e}^{ax}\sin bx = \mathrm{e}^{ax}(a\cos bx - b\sin bx).$$

すべての x に対して $\mathrm{e}^{ax} > 0$ であるから、$\mathrm{f}'(x) = 0$ となるのは $a\cos bx = b\sin bx$ のときであり、かつそのときに限る。

> ? **考えてみよう** ここで $\cos bx$ で割ってもよいだろうか。

よい。もし $\cos bx = 0$ ならば $\sin bx = \pm 1$ であり、方程式は $0 = \pm b$ となるが、$b > 0$ であるからこれは成り立たない。よって任意の停留点で $\cos bx \neq 0$ であり、割ると

$$\tan bx = \frac{a}{b}$$

を得る。$\alpha = \arctan(a/b)$ とおく。$a/b > 0$ であるから $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ である。tan は周期

（period）π をもつので、解は $bx = \alpha + n\pi$ であり、停留点は

$$x_n = \frac{\alpha + n\pi}{b}, \qquad n \in \mathbb{Z}, \qquad \text{ただし } \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

にある。直角をはさむ 2 辺が a と b の直角三角形から、$\cos\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。$\cos(\theta + n\pi) = (-1)^n \cos\theta$ であるから、そこでの f の値は

$$\begin{aligned} \mathrm{f}(x_n) &= \mathrm{e}^{a(\alpha+n\pi)/b}\cos(\alpha + n\pi) \\ &= (-1)^n \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\,\mathrm{e}^{a\alpha/b}\,\mathrm{e}^{na\pi/b} \end{aligned}$$

となる。

極大か極小か。 もう一度微分すると、

$$\mathrm{f}''(x) = \mathrm{e}^{ax}((a^2-b^2)\cos bx - 2ab\sin bx).$$

停留点では $b\sin bx = a\cos bx$ であるから $2ab\sin bx = 2a^2\cos bx$ となり、

$$\mathrm{f}''(x_n) = \mathrm{e}^{ax_n}\cos bx_n\,(a^2 - b^2 - 2a^2) = -(a^2+b^2)\,\mathrm{f}(x_n).$$

よって x_n は $\mathrm{f}(x_n) > 0$（n が偶数）のとき極大（maximum）、$\mathrm{f}(x_n) < 0$（n が奇数）のとき極小（minimum）である。停留点は極大、極小、極大、...と交互に現れる。

等比数列

$0 < \alpha < \pi$ であるから、$x_n > 0$ となるのは $n \geq 0$ のときであり、かつそのときに限る。したがって $x > 0$ にある停留点は $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ であり、各 $n \geq 0$ に対して

$$\frac{\mathrm{f}(x_{n+1})}{\mathrm{f}(x_n)} = \frac{\mathrm{e}^{a(\alpha+(n+1)\pi)/b}\cos(\alpha+(n+1)\pi)}{\mathrm{e}^{a(\alpha+n\pi)/b}\cos(\alpha+n\pi)} = \mathrm{e}^{a\pi/b}\cdot(-1) = -\mathrm{e}^{a\pi/b}$$

となる。ここで $\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$ と $\cos(\alpha+n\pi) \neq 0$ を用いた。この比は n によらないので、値 $\mathrm{f}(x_0), \mathrm{f}(x_1), \ldots$ は初項（first term）$\dfrac{b\,\mathrm{e}^{a\alpha/b}}{\sqrt{a^2+b^2}}$、公比（common ratio）$-\mathrm{e}^{a\pi/b}$ の等比数列をなす。これが示すべきことであった。

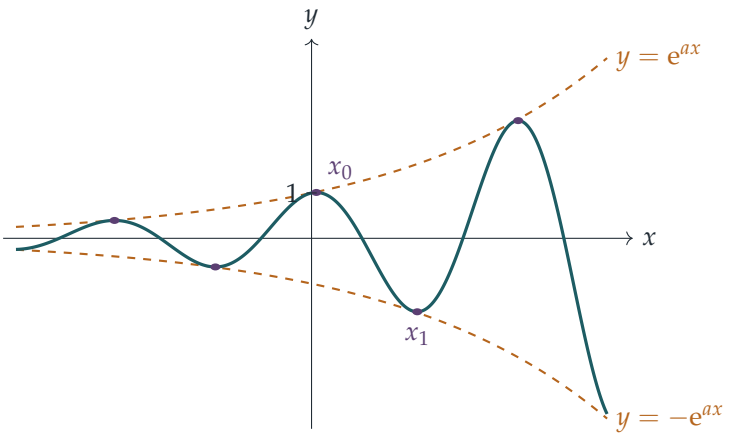
（同じ計算は負の n に対しても成り立つので、実はすべての停留値は両方向に続く一つの等比数列をなす。$x > 0$ に制限するのは、単に自然な初項を定めるためである。）

概形

必要な事実は次のとおりである。

- $-1 \leq \cos bx \leq 1$ であるから、グラフは曲線 $y = \mathrm{e}^{ax}$ と $y = -\mathrm{e}^{ax}$ の間にある。グラフは $\cos bx = 1$ $(bx = 2m\pi)$ となる点で $y = \mathrm{e}^{ax}$ に、$\cos bx = -1$ $(bx = (2m+1)\pi)$ となる点で $y = -\mathrm{e}^{ax}$ に接する。これらの点では $\sin bx = 0$ であるから $\mathrm{f}'(x) = \pm a\mathrm{e}^{ax}$ となり、包絡線（envelope）と同じ傾きをもつ。つまり曲線はそこで包絡線に接しているのであって、向きを変えているのではない。
- 零点は $bx = \frac{\pi}{2} + m\pi$ にあり、間隔は π/b である。また $\mathrm{f}(0) = 1$ である。
- $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるから、各極値点 $bx = \alpha + n\pi$ は対応する接点 $bx = n\pi$ のすぐ後ろにある。増加していく包絡線が、各山をわずかに右へ引きずるのである。
- $x \to \infty$ のとき振動は限りなく大きくなる。$x \to -\infty$ のときは $\mathrm{e}^{ax} \to 0$ であるから、振動しながら $\mathrm{f}(x) \to 0$ となる。

図は $a = 0.3, b = 2$ の場合であり、包絡線 $y = \pm\mathrm{e}^{ax}$ を破線で示している。



検算

- $a = b = 1$ とすると、$\alpha = \frac{\pi}{4}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$ であり $\mathrm{f}(x_0) = \mathrm{e}^{\pi/4}/\sqrt{2} \approx 1.551$、一方 $\mathrm{f}(x_1) = \mathrm{e}^{5\pi/4}\cos\frac{5\pi}{4} \approx -35.89$ である。比は $\approx -23.14 = -\mathrm{e}^{\pi}$ となる。
- $a \to 0$ とすると関数は $\cos bx$ になる。このとき $\alpha \to 0$ で、極値点は $bx = n\pi$ に移り、比は -1 に近づいて、おなじみの $1, -1, 1, \ldots$ が得られる。
- 数値的に、500 組の無作為な (a, b) に対して、$\mathrm{f}'(x_n) = 0$ であること、$\mathrm{f}(x_n)$ が上の式と一致すること、$\mathrm{f}''(x_n) = -(a^2 + b^2)\mathrm{f}(x_n)$ であること、隣り合う値の比が $-\mathrm{e}^{a\pi/b}$ に等しいこと、そして f' がほかに零点をもたないことを確かめた。

よくある間違い

- 極値点を、曲線が包絡線に接する点 $bx = n\pi$ にとってしまう。これらの点での傾きは $\pm ae^{ax} \neq 0$ であり、極値点はそれより少し右にある。
- $bx = \alpha$ だけをとり、$\tan bx = a/b$ の一般解（general solution）$bx = \alpha + n\pi$ を忘れる。
- 比の負号を見落とす。隣り合う停留点の間で余弦の符号が変わるので、値は極大、極小と交互に現れる。

STEP のその先へ

関数 $e^{ax}\cos bx$ は $e^{(a+ib)x}$ の実部（real part）であり、このような関数はまさに、特性方程式（auxiliary equation）が複素数の解をもつ線形微分方程式（linear differential equation）$y'' + py' + qy = 0$ の解である。$a < 0$ のときは減衰振動（damped oscillation）となり（摩擦のある振り子の揺れ）、ここでのように $a > 0$ のときは振動が増大していく不安定な系となる。相続く山の高さの比は一定であり、その比の対数は技術者が対数減衰率（logarithmic decrement）と呼ぶものである。Boyce と DiPrima の *Elementary Differential Equations*（『初等微分方程式』）は 2 階線形方程式の章でこの内容を展開しており、Needham の *Visual Complex Analysis*（『ヴィジュアル複素解析』）は、$e^{(a+ib)x}$ を掛けることがなぜ螺旋を描くのかを示している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。