解答例

STEP III 2025、第 9 問

力学 ・ 質量中心

> **STEP III 2025、問 9**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 11.8 節「傾いたつり合い」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch11/tilted-equilibria.html

鍵となる考え方

台の上に置かれた立体は台と 1 点で接しており、はたらく力は 2 つだけである。重心（centre of mass）G にはたらく重力と、接点にはたらく抗力（reaction）である。この 2 力がつり合うのは、両者が同一の鉛直線上にはたらくときに限られる。したがって、接点における曲面の法線（normal）は G を通らなければならない。小問 (i) では G の位置を求め、小問 (ii) では曲面の法線が軸とどこで交わるかを調べ、小問 (iii) ではその 2 つを組み合わせる。すなわち、法線が G を通るような曲面上の点の個数を数えるのである。

解答

以下、曲線を $0 \le x \le r$ において $y = \dfrac{r^n - x^n}{r^{n-1}}$ と表す。この曲線は y 軸上の点 $(0, r)$ から x 軸上の点 $(r, 0)$ まで下っていき、その間では $y \ge 0$ である。

小問 (i)

立体を y 軸のまわりの薄い円筒殻（cylindrical shell）に分割する。半径 x、厚さ δx、高さ y の円筒殻の体積は $2\pi x y\,\delta x$ であり、密度は一様（uniform）であるから、その重心

は高さ $\frac{1}{2}y$ にある。よって、体積と xz 平面に関するモーメント（moment）は

$$V = 2\pi \int_0^r xy \,\mathrm{d}x, \qquad V\bar{y} = 2\pi \int_0^r x \cdot \tfrac{1}{2}y^2 \,\mathrm{d}x.$$

である。1 つ目の積分は

$$\int_0^r x \,\frac{r^n - x^n}{r^{n-1}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{r^{n-1}} \left(\frac{r^{n+2}}{2} - \frac{r^{n+2}}{n+2} \right) = \frac{n\, r^3}{2(n+2)},$$

であるから、$V = \dfrac{\pi n r^3}{n+2}$ となる。2 つ目については $(r^n - x^n)^2$ を展開して

$$\begin{aligned} \int_0^r x \,\frac{(r^n - x^n)^2}{r^{2n-2}} \,\mathrm{d}x &= \frac{r^{2n+2}}{r^{2n-2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{n+2} + \frac{1}{2n+2} \right) \\ &= r^4 \cdot \frac{(n+2)^2 - 4(n+1)}{2(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)}, \end{aligned}$$

を得るので、$V\bar{y} = \pi \cdot \dfrac{n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)}$ である。割り算をすると

$$\bar{y} = \frac{\pi n^2 r^4}{2(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n+2}{\pi n r^3} = \frac{nr}{2(n+1)},$$

となり、求める結果が得られる。対称性により、重心は y 軸上にある。

小問 (ii)

微分すると $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{nx^{n-1}}{r^{n-1}}$ であり、$x = rp$ においてこれは $-np^{n-1}$ となる。$p > 0$ であるからこれは 0 ではなく、したがって法線の傾き（gradient）は $\dfrac{1}{np^{n-1}}$、その方程式は

$$y - r(1 - p^n) = \frac{x - rp}{np^{n-1}}.$$

である。$x = 0$ を代入すると

$$Y = r(1 - p^n) - \frac{rp}{np^{n-1}} = r\left(1 - p^n - \frac{1}{np^{n-2}}\right),$$

となり、これが求める結果である。

$n = 4$ のとき、$Y(p) = r\left(1 - p^4 - \frac{1}{4}p^{-2}\right)$ であり、

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}p} = r\left(-4p^3 + \frac{1}{2p^3}\right) = \frac{r(1 - 8p^6)}{2p^3}.$$

である。

考えてみよう この停留点が単なる極大値ではなく最大値を与えることは、どうしてわかるのだろうか？

$p>0$ において $\mathrm{d}Y/\mathrm{d}p$ の符号は $1-8p^6$ の符号に一致し、$p^6<\frac{1}{8}$ では正、$p^6>\frac{1}{8}$ では負である。よって Y は $p^6=\frac{1}{8}$、すなわち $p^2=\frac{1}{2}$、$p=1/\sqrt{2}$（これは $(0,1]$ に含まれる）まで増加し、その後は減少する。したがって、これは区間全体での最大値であり、

$$Y_{\max}=r\left(1-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\cdot 2\right)=\tfrac{1}{4}r.$$

である。

小問 (iii)

2 つの部分。 上側の境界 $r^3y=r^4-x^4$ は小問 (i) の曲線で $n=4$ としたものであるから、上の部分（$y=0$ より上）は小問 (i) の立体で $n=4$ としたものである。下側の境界 $ry=-(r^2-x^2)$ は $n=2$ の曲線 $ry=r^2-x^2$ を x 軸に関して折り返したものであるから、下の部分は $n=2$ の立体を上下逆さにしたものである。両者は平面 $y=0$ 上の半径 r の円周の縁で接合している。小問 (i) の $V=\pi nr^3/(n+2)$ を用いると、次のようになる。

	体積	重心の高さ
上（$n=4$）	$\frac{2}{3}\pi r^3$	$\frac{4r}{10}=\frac{2}{5}r$
下（$n=2$、折り返し）	$\frac{1}{2}\pi r^3$	$-\frac{2r}{6}=-\frac{1}{3}r$

モーメントをとると（先ほどと同様に密度は一様と仮定する）、

$$\bar{y}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}r-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}r}{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}}=\frac{\frac{1}{10}r}{\frac{7}{6}}=\frac{3r}{35},$$

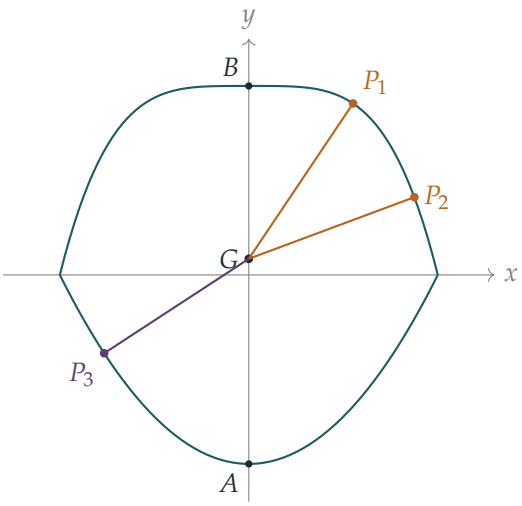
となるので、$G=\left(0,\frac{3}{35}r\right)$ であり、縁より少しだけ上にある。

平衡の条件。

考えてみよう 接点における法線が G を通らなければならないのはなぜだろうか？

曲面上の 1 点 P で台に接して静止しているとき、立体にはたらく力は G に鉛直にはたらく重力と、P にはたらく台からの抗力だけである。2 力がつり合うのは、それらが大きさが等しく、向きが反対で、同一直線上にあるときに限られるので、G は P の鉛直上方になければならない。台の面は P における接平面（tangent plane）であるから、P を通る鉛直線はそこでの立体の法線である。すなわち、P における法線は G を通らなければならない。逆に、法線が G を通るならば、立体はそこで静止できる。なぜなら、

立体は凸（convex）であり（断面の曲線 $y = r - x^4/r^3$ は凹（concave）、$y = (x^2 - r^2)/r$ は凸である）、したがって P における接平面の片側に完全に収まるからである。回転面（surface of revolution）の法線は軸を含む平面内にあるので、xy 平面による断面だけを考えればよい。G は軸上にあるので、y 軸と $Y = \frac{3}{35}r$ で交わる法線を求めればよい。



上側の曲面で接する場合。 小問 (ii) で $n = 4$ とすると（$r(1-p^4)$ は点の高さ）、点 $\big(rp, r(1-p^4)\big)$ における法線は軸と $r\big(1 - p^4 - \frac{1}{4}p^{-2}\big)$ で交わる。これを $\frac{3}{35}r$ に等しいとおき、$140p^2$ を掛けると

$$140p^2 - 140p^6 - 35 = 12p^2 \iff h(q) := 140q^3 - 128q + 35 = 0, \quad q = p^2.$$

を得る。ここで $h(0) = 35 > 0$、$h(\frac{1}{2}) = 17.5 - 64 + 35 = -11.5 < 0$、$h(1) = 47 > 0$ である。よって h は根 $q_1 \in (0, \frac{1}{2})$ と根 $q_2 \in (\frac{1}{2}, 1)$ をもち、上側の曲面上に $0 < p_1 < 1/\sqrt{2} < p_2 < 1$ を満たす 2 点 P_1, P_2 が得られる。（これは小問 (ii) から予想されることである。$\frac{3}{35}r$ は最大値 $\frac{1}{4}r$ より小さいので、この値は最大点の両側でそれぞれ 1 回ずつとられる。）

下側の曲面で接する場合。 $n = 2$ の曲線では、パラメータ p における法線は軸と $r(1 - p^2 - \frac{1}{2}) = r(\frac{1}{2} - p^2)$ で交わる。x 軸に関して折り返すと、下側の曲面上の点 $\big(rp, -r(1-p^2)\big)$ における法線は軸と $r(p^2 - \frac{1}{2})$ で交わる。これを $\frac{3}{35}r$ に等しいとおくと

$$p^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{35} = \tfrac{41}{70}, \qquad p_3 = \sqrt{41/70} \in (0, 1),$$

となり、3 つ目の点 P_3 が得られる（用いている半断面では $p > 0$ なので正の根をとる。図に示したのはその鏡像であり、対称性により同等である）。

3 つの角は互いに異なり、いずれも 0 でない。 立体が P で静止しているとき、上向きの鉛直方向は P から G へ向かう方向、すなわち P における内向きの法線の方向である。

- 下側の P_3 では、内向きの法線 $(-2p_3, 1)$（曲線の傾きは $2p_3$）は上を向いており、y 軸の正の向きを向く $\overrightarrow{AB}$ と鋭角 $\arctan(2p_3)$ をなす。
- 上側の P_1 または P_2 では、内向きの法線 $(-4p^3, -1)$ は下を向いているので、$\overrightarrow{AB}$ とのなす角は鈍角 $180^\circ - \arctan(4p^3)$ である。

$p_1 \neq p_2$ であり、$\arctan(4p^3)$ は狭義単調増加であるから、2 つの鈍角は互いに異なり、いずれも鋭角の方とも異なる。また $p_1, p_2, p_3 > 0$ であるから、いずれも 0 ではない。よって、立体は $\overrightarrow{AB}$ が上向きの鉛直方向と互いに異なる 3 つの 0 でない角をなす状態で平衡（equilibrium）を保って静止でき、題意が示された。

（実際にはこれ以外にもある。立体は縁で釣り合うこともでき、また $\overrightarrow{AB}$ が真下を向いた状態で B で釣り合うこともできる。問題に答えるには、曲面上の 3 つの位置で十分である。）

検算

- 小問 (i) で $n = 2$ とすると、高さ r の放物面（paraboloid）に対して $\frac{1}{3}r$ を得る。これは、中身の詰まった放物面の重心は頂点から底面までの 3 分の 2 の位置にあるという標準的な結果に一致する。$n \to \infty$ のとき立体は高さ r の円柱に近づき、$\bar{y} \to \frac{1}{2}r$ となるが、これも当然そうあるべき結果である。
- 小問 (ii) で、$n = 4$、$p = 1$（縁）のとき $Y = -\frac{1}{4}r$ を得る。そこでの傾きは -4 であるから、法線の傾きは $\frac{1}{4}$ であり、水平距離 r の間に $\frac{1}{4}r$ だけ下がる。結果は一致している。
- $r = 1$ のとき、根は $p_1 \approx 0.552$、$p_2 \approx 0.876$、$p_3 \approx 0.765$ であり、角はおよそ 146.1°、110.4°、56.8° である。台からの G の高さが停留する傾きをコンピュータで探索したところ、0° と 180° の間（両端を除く）に見つかったのはちょうどこの 3 つと、縁で接する位置（約 85.1°）であった。

よくある間違い

- 下の部分の重心を $+\frac{1}{3}r$ に置いてしまうこと。下の部分は $n = 2$ の立体を上下逆さにしたものなので、その重心は縁より下にある。
- x を y の $\frac{2}{n}$ 乗で表したまま、円板（disc）の体積 $\pi x^2\,\delta y$ を用いること。この方法で

も解けるが、円筒殻による方法なら多項式の積分で済む。

- $q = p^2$ に関する 3 次方程式を求めたものの、それが $0 < p < 1$ を満たす根を 2 つもつことを示していないこと。$q = 0, \frac{1}{2}, 1$ での符号を調べれば決着がつく。

STEP のその先へ

法線が G を通るという条件は、物体が転がるときに G の高さが停留するという条件であり、その高さは位置エネルギー（potential energy）にほかならない。安定（stable）な位置はその極小点、不安定な位置はその極大点である。滑らかな凸の物体は少なくとも 2 つの平衡位置をもたなければならないが、2006 年に発見された「ゲンボツ（Gömböc）」は、安定な位置と不安定な位置をそれぞれ 1 つずつしかもたない凸の形状である。位置エネルギーと安定性の一般的な理論は、Kleppner and Kolenkow, *An Introduction to Mechanics*（力学入門）に詳しい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。