解答例

STEP III 2025、第 8 問

純粋数学 ・ 複素数による三角関数の和

> **STEP III 2025、問 8**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

(i) の恒等式は漸化式（recurrence）である。すなわち $z^{m+1} - z^{-(m+1)}$ を、2 段下の同じ形の式を用いて表しているので、これを繰り返し適用すると和が望遠鏡和（telescoping sum）のように消えていく。$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ とおくと、どの $z^k \pm z^{-k}$ も $2\cos k\theta$ または $2\mathrm{i}\sin k\theta$ となり、代数的な計算が三角関数の恒等式に変わる。数値を求める部分は、$\sin 2n\theta$ が $\sin\theta$（または $\cos\theta$）に等しくなって約分できるように θ を選ぶことで得られる。

解答

小問 (i)

積を展開すると、

$$\left(z - \frac{1}{z}\right)\left(z^m + \frac{1}{z^m}\right) = z^{m+1} + z^{1-m} - z^{m-1} - z^{-(m+1)}.$$

これに $z^{m-1} - z^{1-m}$ を加えると中央の 2 項が打ち消し合い、$z^{m+1} - z^{-(m+1)}$ が残る。これが求める恒等式である。

数学的帰納法（*induction*）。 $n = 1$ のとき、主張は $z^2 - z^{-2} = (z - z^{-1})(z + z^{-1})$ であり、これは平方の差の因数分解なので成り立つ。ある $n \geq 1$ で成り立つと仮定する。

$m=2n+1$（したがって $m+1=2n+2$、$m-1=2n$）として恒等式を用いると、

$$\begin{aligned} z^{2n+2}-\frac{1}{z^{2n+2}} &= \left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^{2n+1}+\frac{1}{z^{2n+1}}\right)+\left(z^{2n}-\frac{1}{z^{2n}}\right) \\ &= \left(z-\frac{1}{z}\right)\left(z^{2n+1}+\frac{1}{z^{2n+1}}\right)+\left(z-\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n}\left(z^{2r-1}+\frac{1}{z^{2r-1}}\right) \\ &= \left(z-\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n+1}\left(z^{2r-1}+\frac{1}{z^{2r-1}}\right), \end{aligned}$$

となる。ここで帰納法の仮定を用い、追加された項が $r=n+1$ の項であることを使った。よって $n+1$ のときも成り立ち、数学的帰納法によりすべての $n\geq 1$ で成り立つ。

$z+\frac{1}{z}$ を用いる場合。同様にして、

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{m}-\frac{1}{z^{m}}\right)=z^{m+1}-z^{1-m}+z^{m-1}-z^{-(m+1)},$$

であるから、今度は $z^{m-1}-z^{1-m}$ を**引か**なければならない：

$$z^{m+1}-\frac{1}{z^{m+1}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(z^{m}-\frac{1}{z^{m}}\right)-\left(z^{m-1}-\frac{1}{z^{m-1}}\right).$$

このマイナス符号のため、段を下るごとに符号が交互に変わる。そこで次を主張する。

$$z^{2n}-\frac{1}{z^{2n}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\left(z^{2r-1}-\frac{1}{z^{2r-1}}\right).$$

$n=1$ のとき、これもやはり $(z+z^{-1})(z-z^{-1})$ である。n で成り立つならば、$m=2n+1$ とした恒等式から

$$z^{2n+2}-\frac{1}{z^{2n+2}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left[\left(z^{2n+1}-\frac{1}{z^{2n+1}}\right)-\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\left(z^{2r-1}-\frac{1}{z^{2r-1}}\right)\right],$$

が得られる。$-(-1)^{n-r}=(-1)^{n+1-r}$ であり、また第 1 項は符号 $(-1)^0=1$ をもつ $r=n+1$ の項であるから、括弧の中はちょうど $\sum_{r=1}^{n+1}(-1)^{n+1-r}(z^{2r-1}-z^{-(2r-1)})$ となる。これで帰納法が完結する。書き下すと、

$$z^{2n}-\frac{1}{z^{2n}}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left[\left(z^{2n-1}-\frac{1}{z^{2n-1}}\right)-\left(z^{2n-3}-\frac{1}{z^{2n-3}}\right)+\cdots\pm\left(z-\frac{1}{z}\right)\right].$$

小問 (ii)

(a) $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ とすると、$z^k+z^{-k}=2\cos k\theta$、$z^k-z^{-k}=2\mathrm{i}\sin k\theta$ である。(i) の最初の結果は

$$2\mathrm{i}\sin 2n\theta=2\mathrm{i}\sin\theta\sum_{r=1}^{n}2\cos(2r-1)\theta,$$

となり、両辺を $2\mathrm{i}$ で割ると、求める $\sin 2n\theta=2\sin\theta\sum_{r=1}^{n}\cos(2r-1)\theta$ が得られる。

(b) $n=2$ とすると、$\sin 4\theta = 2\sin\theta(\cos\theta+\cos 3\theta)$ である。$\sin 4\theta$ を $\sin\theta$ に等しくしたいが、$\theta=\frac{1}{5}\pi$ とすればよい。実際、$\sin\frac{4}{5}\pi=\sin(\pi-\frac{1}{5}\pi)=\sin\frac{1}{5}\pi$ である。$\sin\frac{1}{5}\pi\neq 0$ であるから、これで割ることができて、

$$1=2(\cos\tfrac{1}{5}\pi+\cos\tfrac{3}{5}\pi).$$

ここで $\cos\frac{3}{5}\pi=-\cos(\pi-\frac{3}{5}\pi)=-\cos\frac{2}{5}\pi$ であるから、$\cos\frac{1}{5}\pi-\cos\frac{2}{5}\pi=\frac{1}{2}$、すなわち $\cos\frac{2}{5}\pi=\cos\frac{1}{5}\pi-\frac{1}{2}$ である。

(c) $n=7$、$\theta=\frac{1}{15}\pi$ とすると、やはり $\sin 14\theta=\sin(\pi-\theta)=\sin\theta\neq 0$ であるから、

$$\sum_{r=1}^{7}\cos\frac{(2r-1)\pi}{15}=\frac{1}{2}.$$

考えてみよう ここに現れる 7 つの角は $\frac{1}{15}\pi$ の奇数倍であるが、目標の式には偶数倍が現れる。一方から他方へはどう移ればよいだろうか。

$\frac{1}{2}\pi$ を超える角には $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ を用い、さらに $\cos\frac{5}{15}\pi=\cos\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}$、$\cos\frac{3}{15}\pi=\cos\frac{1}{5}\pi$ に注意する：

$$\cos\tfrac{9}{15}\pi=-\cos\tfrac{2}{5}\pi,\qquad \cos\tfrac{11}{15}\pi=-\cos\tfrac{4}{15}\pi,\qquad \cos\tfrac{13}{15}\pi=-\cos\tfrac{2}{15}\pi.$$

和は次のようになる。

$$\cos\tfrac{1}{15}\pi+\cos\tfrac{7}{15}\pi-\cos\tfrac{2}{15}\pi-\cos\tfrac{4}{15}\pi+\tfrac{1}{2}+(\cos\tfrac{1}{5}\pi-\cos\tfrac{2}{5}\pi)=\tfrac{1}{2}.$$

(b) より括弧の中は $\frac{1}{2}$ であるから、

$$\cos\tfrac{2}{15}\pi+\cos\tfrac{4}{15}\pi-\cos\tfrac{7}{15}\pi-\cos\tfrac{1}{15}\pi=\tfrac{1}{2}.$$

最後に $-\cos\frac{7}{15}\pi=\cos(\pi-\frac{7}{15}\pi)=\cos\frac{8}{15}\pi$、$-\cos\frac{1}{15}\pi=\cos(\pi+\frac{1}{15}\pi)=\cos\frac{16}{15}\pi$ であるから、

$$\cos\tfrac{2}{15}\pi+\cos\tfrac{4}{15}\pi+\cos\tfrac{8}{15}\pi+\cos\tfrac{16}{15}\pi=\tfrac{1}{2},$$

となり、求める結果が得られる。

小問 (iii)

考えてみよう 目標の式は、θ の奇数倍の正弦の交代和である。(i) のどの結果からちょうどこの形が得られるだろうか。

$z+\frac{1}{z}$ を用いる場合の結果である。$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ とすると、これは

$$2\mathrm{i}\sin 2n\theta = 2\cos\theta\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\,2\mathrm{i}\sin(2r-1)\theta,$$

となるので、

$$\sin 2n\theta = 2\cos\theta\sum_{r=1}^{n}(-1)^{n-r}\sin(2r-1)\theta.$$

$n=3$ とすると、

$$\sin 6\theta = 2\cos\theta\,(\sin 5\theta - \sin 3\theta + \sin\theta).$$

今度は $\sin 6\theta = \cos\theta$ としたいが、$\theta=\frac{1}{14}\pi$ とすればよい。実際、$\sin\frac{6}{14}\pi = \cos(\frac{1}{2}\pi - \frac{6}{14}\pi) = \cos\frac{1}{14}\pi$ であり、これは 0 でない。これで割ると、

$$\sin\tfrac{1}{14}\pi - \sin\tfrac{3}{14}\pi + \sin\tfrac{5}{14}\pi = \tfrac{1}{2}.$$

検算

- 簡単な値で恒等式を確かめる。$z=2$、$n=2$ のとき左辺は $16-\frac{1}{16}=\frac{255}{16}$ であり、一方 $(2-\frac{1}{2})(2+\frac{1}{2}+8+\frac{1}{8}) = \frac{3}{2}\cdot\frac{85}{8} = \frac{255}{16}$、$(2+\frac{1}{2})(8-\frac{1}{8}-2+\frac{1}{2}) = \frac{5}{2}\cdot\frac{51}{8} = \frac{255}{16}$ である。
- 数値的に、$\cos\frac{2}{5}\pi = 0.309017\ldots$ と $\cos\frac{1}{5}\pi - \frac{1}{2} = 0.809017\ldots - 0.5$ は一致する。これはよく知られた $\cos\frac{1}{5}\pi = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$、$\cos\frac{2}{5}\pi = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ である。
- (ii)(c) と (iii) の和は、電卓で計算するとどちらも 0.500000 となる。

よくある間違い

- $z+\frac{1}{z}$ の漸化式で符号を誤ること。下の項は引かれるので、和は交代和となり、最上位の項 $z^{2n-1}-z^{-(2n-1)}$ の符号が $+$ でなければならない。
- 選んだ角で $\sin\theta$ や $\cos\theta$ が 0 でないことを確認せずに、それで割ること。
- (ii)(c) で、$\cos\frac{5}{15}\pi = \frac{1}{2}$ であることや、残りの 2 項を片付けるのに (b) が必要であることを見落とすこと。

STEP のその先へ

$z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ のときの式 z^k+z^{-k} は $2\cos k\theta$ であり、(i) のような漸化式はまさにチェビシェフ多項式（Chebyshev polynomials）が満たすものである。チェビシェフ多項式は $\cos k\theta$ や $\sin k\theta/\sin\theta$ を $\cos\theta$ の多項式に変える。(ii)(c) と (iii) のきれいな和は 1 の

冪根（roots of unity）に由来する。角 $\frac{2}{15}\pi, \frac{4}{15}\pi, \frac{8}{15}\pi, \frac{16}{15}\pi$ は倍にすることを繰り返して生成されており、これはガウス（Gauss）の周期（Gaussian periods）とガロア理論（Galois theory）への最初の入り口である。この幾何学を味わうには、Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的な複素解析の入門書）がすばらしい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。