解答例

STEP III 2025、第 7 問

純粋数学 • 逆正接関数

> **STEP III 2025、問 7**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

すべては一つの事実にかかっている。それは $\mathrm{f}(x)\,\mathrm{f}(-x) = 1$ である。なぜなら $(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x) = 1$ だからである。これと $\mathrm{f}(x) > 0$ とを合わせると、$\mathrm{g}(x)+\mathrm{g}(-x)$ はおなじみの $\tan^{-1} t + \tan^{-1}(1/t)$ になる。(c) では、$\tan\frac{1}{2}\theta$ は半角のタンジェント（half-angle tangent）であり、$\tan\theta = 1/x$ とすると $\mathrm{f}(x)$ に簡約される。$x > 0$ で g と k が一致することがわかれば、(e) の二つの積分は対称性（symmetry）によって結びつけられる。

解答

小問 (i)

$x \neq 0$ のとき $x^2 = |x|^2$ であるから、

$$\sqrt{x^2+1} = |x|\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{1/2} = |x|\left(1+\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{8x^4}+\cdots\right) = |x|+\frac{1}{2|x|}-\frac{1}{8|x|^3}+\cdots,$$

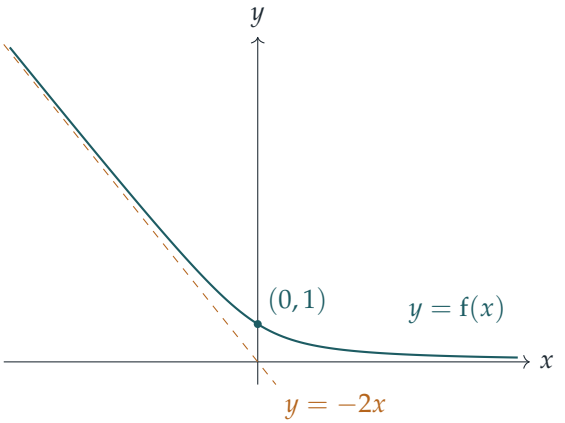
となる。ここで二項級数（binomial series）を用いた。$|x|$ が大きいとき $1/x^2 < 1$ であるから、この展開は有効である。$|x|^{-3}$ のオーダーの項を落とすと、求める近似 $\sqrt{x^2+1} \approx |x| + \dfrac{1}{2|x|}$ が得られる。

概形。まず事実を集める。

- $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq x$ であるから、すべての x に対して $\mathrm{f}(x) > 0$ である。また $\mathrm{f}(0) = 1$ である。
- $x < \sqrt{x^2+1}$ であるから $\mathrm{f}'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1 < 0$ となり、f は減少関数（decreasing

function）である。さらに $f''(x) = (x^2+1)^{-3/2} > 0$ であるから、曲線は下に凸（convex）である。

- $x \to +\infty$ のとき：$f(x) \approx x + \frac{1}{2x} - x = \frac{1}{2x} \to 0^+$ であるから、x 軸は漸近線（asymptote）である。
- $x \to -\infty$ のとき：$|x| = -x$ であるから $f(x) \approx -2x + \frac{1}{2|x|}$ となる。直線 $y = -2x$ は斜めの漸近線であり、曲線はそのすぐ上にある。



小問 (ii)(a)

平方の差（difference of two squares）を展開すると

$$f(x)\,f(-x) = \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = (x^2+1) - x^2 = 1,$$

となるので、$f(-x) = 1/f(x)$ である。$t = f(x)$ とおくと、小問 (i) よりこれは正である。すると

$$g(x) + g(-x) = \tan^{-1} t + \tan^{-1} \frac{1}{t}.$$

考えてみよう なぜ $\tan^{-1} t + \tan^{-1}(1/t) = \frac{1}{2}\pi$ には $t > 0$ が必要なのだろうか？

$\alpha = \tan^{-1} t$ とおく。$t > 0$ であるから $\alpha \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ であり、したがって $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ も $(0, \frac{1}{2}\pi)$ に属する。この区間は $\tan^{-1}$ の値域（range）に含まれる。そのタンジェントは $\cot\alpha = 1/t$ であるから、$\tan^{-1}(1/t) = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ となる。よって $g(x) + g(-x) = \frac{1}{2}\pi$ を得る。（$t < 0$ ならば和は $-\frac{1}{2}\pi$ になる。f が正であることが重要なのはこのためである。）

小問 (ii)(b)

$\tan^{-1}$ は奇関数（odd function）であるから、$x \neq 0$ に対して

$$\mathrm{k}(-x) = \tfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\tfrac{1}{2}\tan^{-1}\frac{1}{x} = -\mathrm{k}(x),$$

となり、これは $\mathrm{k}(x) + \mathrm{k}(-x) = 0$ を意味する。

小問 (ii)(c)

$x > 0$ とし、$\theta = \tan^{-1}(1/x)$ とおく。すると $\theta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ であり、$\mathrm{k}(x) = \frac{1}{2}\theta$ である。対辺が 1、隣辺が x の直角三角形を考えると、$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$、$\cos\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ である。半角の公式（half-angle identity）$\tan\frac{1}{2}\theta = \dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$（これは $1 - \cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$ と $\sin\theta = 2\sin\frac{1}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$ から得られる）を用いると、

$$\tan\mathrm{k}(x) = \frac{1 - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = \sqrt{x^2+1} - x = \mathrm{f}(x) = \tan\mathrm{g}(x).$$

これで結果が証明された。

さらに言えることがある。$x > 0$ のとき $\mathrm{k}(x) \in (0, \frac{1}{4}\pi)$ である。また $0 < \mathrm{f}(x) < \mathrm{f}(0) = 1$ であるから、$\mathrm{g}(x) \in (0, \frac{1}{4}\pi)$ でもある。tan はこの区間で一対一（one-to-one）であるから、

$$\mathrm{k}(x) = \mathrm{g}(x) \quad \text{ただし} x > 0.$$

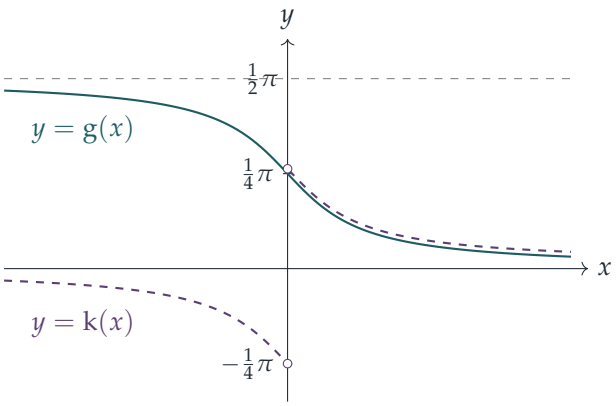
$x < 0$ のときは $-x > 0$ であるから、(b)、次にいま示したこと、そして (a) を順に用いて、

$$\mathrm{k}(x) = -\mathrm{k}(-x) = -\mathrm{g}(-x) = \mathrm{g}(x) - \tfrac{1}{2}\pi \quad \text{ただし} x < 0.$$

小問 (ii)(d)

$\tan^{-1}$（増加）と f（減少）はどちらも単調（monotonic）であるから、$\mathrm{g} = \tan^{-1} \circ \mathrm{f}$ は減少関数である。$x \to -\infty$ のとき $\mathrm{f} \to \infty$、$\mathrm{g} \to \frac{1}{2}\pi$ である。$x \to +\infty$ のとき $\mathrm{f} \to 0^+$、$\mathrm{g} \to 0$ である。また $\mathrm{g}(0) = \tan^{-1} 1 = \frac{1}{4}\pi$ であり、(a) よりグラフは点 $(0, \frac{1}{4}\pi)$ に関して回転対称（rotational symmetry）である。

(c) より、$x > 0$ では k のグラフは g のグラフと同じであり、$\frac{1}{4}\pi$（この値はとらない）から 0 に向かって減少する。$x < 0$ では g のグラフを $\frac{1}{2}\pi$ だけ下に平行移動したものであり、0（$x \to -\infty$ のとき）から、$x \to 0^-$ のとき $-\frac{1}{4}\pi$ に向かって減少する。よって k は奇関数であり、定義されない点 $x = 0$ で $\frac{1}{2}\pi$ だけ跳躍する。



（$x > 0$ では二つの曲線は一致する。そこで破線の曲線を実線の少し上に描いているのは、両方が見えるようにするためにすぎない。）

小問 (ii)(e)

$x > 0$ のとき $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}\dfrac{1}{x} = \dfrac{-1/x^2}{1+1/x^2} = -\dfrac{1}{1+x^2}$ である。$\tan^{-1}(1/x)$ を微分し、1 を積分する形で部分積分（integration by parts）を行うと、

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x &= \tfrac{1}{2}\left[x\tan^{-1}\frac{1}{x}\right]_0^1 + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}\Big[\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2.\end{aligned}$$

下端については、$\tan^{-1}(1/x)$ は $\frac{1}{2}\pi$ より小さいままであるから、$x \to 0^+$ のとき $x\tan^{-1}(1/x) \to 0$ である。（被積分関数は有界であるから、この積分は何の問題もない通常の積分である。）

よって。(c) より、$-1 \le x < 0$ に対して $\mathrm{g}(x) = \mathrm{k}(x) + \frac{1}{2}\pi$ である。(b) より k は奇関数であるから、$\int_{-1}^{0}\mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 \mathrm{k}(x)\,\mathrm{d}x$ である。したがって

$$\int_{-1}^{0}\mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\ln 2\right) = \frac{3\pi}{8} - \frac{1}{4}\ln 2.$$

検算

- $[-1,0]$ 上で g は $\mathrm{g}(-1) = \tan^{-1}(\sqrt{2}+1) = \frac{3}{8}\pi \approx 1.178$ から $\frac{1}{4}\pi \approx 0.785$ まで減少するので、積分の値はこれらの値の間になければならない。得られた答えは $\frac{3}{8}\pi - \frac{1}{4}\ln 2 \approx 1.0048$ であり、数値積分（numerical quadrature）でも小数第 10 位まで同じ値が得られる。同様に $\int_0^1 \mathrm{k}\,\mathrm{d}x \approx 0.56599$ である。

- 微分すると $\mathrm{g}'(x) = -\dfrac{1}{2(1+x^2)}$ となるので、実は $\mathrm{g}(x) = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}\tan^{-1} x$ である。この式を使えば (a) は明らかであり、これを直接積分すると (e) の答えが再現される。
- $x = 1$ のとき：$\mathrm{f}(1) = \sqrt{2} - 1 = \tan\frac{1}{8}\pi$ であり、$\mathrm{k}(1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{8}\pi$ である。これは (c) の予測どおりである。

よくある間違い

- 大きいすべての $|x|$ に対して $\sqrt{x^2+1} \approx x + \frac{1}{2x}$ と書いてしまう。負の x に対してはこれは符号が逆になり、漸近線 $y = -2x$ が見えなくなってしまう。
- (c) から、いたるところで $\mathrm{k} = \mathrm{g}$ であると結論してしまう。タンジェントが等しくても、角は π の整数倍の差を除いてしか等しくならない。実際、$x < 0$ では二つの関数は $\frac{1}{2}\pi$ だけ異なる。
- 部分積分において、0 における $x\tan^{-1}(1/x)$ の極限を正当化し忘れる。

STEP のその先へ

$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ であるから、関数 f は $\mathrm{e}^{-\sinh^{-1} x}$ である。その逆数の性質 $\mathrm{f}(-x) = 1/\mathrm{f}(x)$ は、$\sinh^{-1}$ が奇関数であることにほかならない。(c) の落とし穴、すなわちタンジェントが等しくても角が等しいとは限らないという点は、逆関数における分枝（branch）の問題の実変数版である。この問題は複素対数（complex logarithm）や偏角（argument）において、より本格的な形で再び現れる。Needham の *Visual Complex Analysis*（視覚的に学ぶ複素解析）はこれを見るのに素晴らしい本であり、Abbott の *Understanding Analysis*（解析学の入門書）は極限や広義積分（improper integral）を丁寧に扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。