解答例

STEP III 2025、第 6 問

純粋数学 • 解の対称式

STEP III 2025、問 6

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

$a+b+c$、$a^2+b^2+c^2$、$a^3+b^3+c^3$ に関する条件は、実際には基本対称式（elementary symmetric functions）$a+b+c$、$ab+bc+ca$、abc に関する条件である。そのように言い換えてしまえば、(i) では 3 つの数がごく単純な多項式（polynomial）の根（roots）となり、(ii) と (iii) では古典的な因数分解（factorisation）がすべてを片づけてくれる。最後の小問は、同じ代数を逆向きにたどるものである。

解答

小問 (i)

$a+b+c=0$ の両辺を 2 乗すると

$$0=(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=2(ab+bc+ca),$$

となるので、$ab+bc+ca=0$ も成り立つ。

すべてが実数ではないこと。 もし a、b、c がすべて実数であれば、a^2、b^2、c^2 は和が 0 である非負の実数となり、$a=b=c=0$ でなければならない。これは 3 つの数が 0 でないことに矛盾するので、すべてが実数であることはありえない。

絶対値が等しいこと。 $p=abc$ とおくと、これは 0 でない。$a+b+c=0$ かつ $ab+bc+ca=0$ であるから、

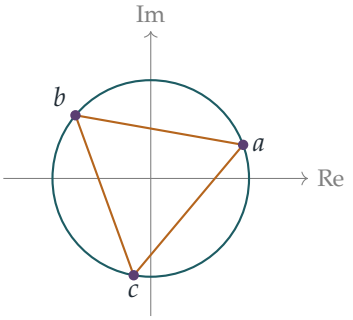
$$(z-a)(z-b)(z-c)=z^3-(a+b+c)z^2+(ab+bc+ca)z-abc=z^3-p.$$

したがって a、b、c はいずれも $z^3 = p$ の根であり、すなわち

$$a^3 = b^3 = c^3 = p.$$

である。絶対値（modulus）をとると $|a|^3 = |b|^3 = |c|^3 = |p|$ となり、絶対値は非負の実数であるから $|a| = |b| = |c| = |p|^{1/3}$ である。よって a、b、c の絶対値はすべて等しく、示すべきことが示された。

実は a、b、c は p の 3 つの立方根（cube roots）であり、原点を中心とする正三角形の頂点に位置している。



小問 (ii)

$a + b + c = 0$ と仮定する。このとき $c = -(a + b)$ であり、

$$a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a + b)^3 = -3a^2b - 3ab^2 = -3ab(a + b) = 3abc.$$

となる。さらに $a^3 + b^3 + c^3 = 0$ でもあれば $abc = 0$ となり、少なくとも 1 つの数が 0 である。したがって、両方の性質をもつ 3 つの o **でない**複素数は存在しない。

小問 (iii)

今回役に立つ恒等式は

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a),$$

である。これは展開すれば確かめられる。両辺とも a^2b、ab^2 などの各項をそれぞれ 3 回ずつ、abc を 6 回含んでいる。

さて $d = -(a + b + c)$ であるから $d^3 = -(a + b + c)^3$ であり、

$$0 = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a^3 + b^3 + c^3 - (a + b + c)^3 = -3(a + b)(b + c)(c + a).$$

となる。

考えてみよう 積が 0 であることから、なぜ絶対値について何かがわかるのだろうか。

複素数の積が 0 になるのは、いずれかの因数が 0 のときに限る。よって $a+b$、$b+c$、$c+a$ のいずれかが 0 になる。$a+b=0$ としよう（ほかの場合も文字を入れ替えれば同じである）。このとき $b=-a$ であるから $|b|=|a|$ である。したがって、4 つの数のうち少なくとも 2 つは絶対値が等しい。

（ここでは $d\neq 0$ であることも、各数が 0 でないことも使っていない。結論は単に、4 つの数が $a,-a,c,-c$ のように、互いに符号が反対の 2 組に分かれるということである。）

小問 (iv)

$c=1$、$d=-2$、$e=3$ とすると

$$c+d+e=2, \qquad c^3+d^3+e^3=1-8+27=20,$$

であるから、次を満たす実数 a、b が必要である。

$$a+b=-2, \qquad a^3+b^3=-20.$$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$ を用いると、2 番目の条件は

$$-20=-8+6ab \quad \Longrightarrow \quad ab=-2.$$

となる。よって a と b は $t^2+2t-2=0$ の根、すなわち

$$a=-1+\sqrt{3}, \qquad b=-1-\sqrt{3},$$

であり、判別式（discriminant）が $4+8=12$ で正であるから、これらは実数である。それぞれの絶対値は $\sqrt{3}-1\approx 0.73$ と $\sqrt{3}+1\approx 2.73$ であり、どちらも 1、2、3 のいずれとも異なる（どちらも無理数である）。したがって

$$-1+\sqrt{3}, \quad -1-\sqrt{3}, \quad 1, \quad -2, \quad 3$$

は、絶対値が相異なり、和が 0 で、3 乗の和も 0 となる 5 つの実数である。

検算

- (i) について、1 の立方根 1、ω、ω^2 は $1+\omega+\omega^2=0$ および $1+\omega^2+\omega^4=1+\omega^2+\omega=0$ を満たす。予想どおり、絶対値はすべて 1 で、すべてが実数というわけではない。

- (iii) について、$a = 2$、$b = -2$、$c = \mathrm{i}$、$d = -\mathrm{i}$ を試してみると、2 つの和はともに 0 になり、確かに各数は符号が反対の組に分かれている。
- (iv) について、$(\sqrt{3}-1)^3 = 6\sqrt{3} - 10$ と $(-1-\sqrt{3})^3 = -6\sqrt{3} - 10$ を用いると、数値的に $0.7320 - 2.7320 + 1 - 2 + 3 = 0$ および $0.3923 - 20.3923 + 1 - 8 + 27 = 0$ となる。

よくある間違い

- (i) で、$a^3 = b^3$ から「立方根をとって」$|a| = |b|$ を結論づけること。a と b は等しいとは限らないが、絶対値は非負の実数であるから、絶対値は等しくなる。
- (iii) で、$(a+b)(b+c)(c+a) = 0$ からいずれかの因数が 0 になることがなぜ言えるのか（$\mathbb{C}$ には零因子（zero divisors）が存在しないこと）を述べ忘れること。
- (iv) で、a と b の絶対値が 1、2、3 と異なること、および互いに異なることを確認し忘れること。

STEP のその先へ

多変数の対称式（symmetric polynomial）はすべて基本対称式を用いて表すことができ、ニュートン（Newton）の恒等式（Newton's identities）はべき和（power sums）$a^k + b^k + c^k + \ldots$ との関係を明示的に与える。ここでの条件が数をこれほど強く決定してしまうのは、このためである。これに近い問題として、プルーエ・タリー・エスコット問題（Prouhet–Tarry–Escott problem）がある。これは、1 乗、2 乗、...、k 乗の和がすべて一致するような、異なる 2 つの整数の集合を見つける問題であり、現在も部分的に未解決である。多項式とその根の代数については、Allenby の *Rings, Fields and Groups*（環・体・群）を参照するとよい。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。