解答例

STEP III 2025、第 5 問

純粋数学 ・ 空間ベクトル

STEP III 2025、問 5

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

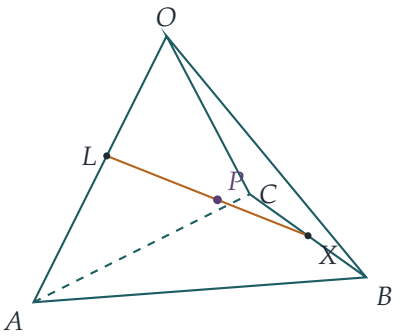
www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

O は一直線上にない 3 点 A, B, C が定める平面の上方にあるので、ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ は一次独立（linearly independent）である。したがって、これらを用いて書かれたベクトルの等式では**係数比較**（comparing coefficients）を行ってよい。問題に現れる点はすべて、未知のパラメータを用いて表し、係数を比較することで求められる。平面からの高さは係数の定数倍にすぎないので、「水平」という条件も容易に扱える。

解答

O は平面 ABC 上にないので、$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のいずれも残りの 2 つの一次結合では表せない（たとえば $\mathbf{c} = p\mathbf{a} + q\mathbf{b}$ ならば、O, A, B, C は同一平面上にあることになる）。よって $x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} = x'\mathbf{a} + y'\mathbf{b} + z'\mathbf{c}$ ならば $x = x', y = y', z = z'$ である。また、$k > 0$ であることにも注意する。



小問 (i)

$\overrightarrow{OL} = \lambda\mathbf{a}$、$\overrightarrow{OX} = (1-t)\mathbf{b} + t\mathbf{c}$ とおく。P は LX 上にあるので、ある s を用いて

$$\overrightarrow{OP} = (1-s)\lambda\,\mathbf{a} + s(1-t)\,\mathbf{b} + st\,\mathbf{c}.$$

と書ける。$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ と係数を比較すると

$$(1-s)\lambda = \alpha, \qquad s(1-t) = \beta, \qquad st = \gamma.$$

後の2式を加えると $s = \beta + \gamma$ となり、さらに $t = \gamma/(\beta+\gamma)$ であるから

$$\overrightarrow{OX} = \frac{\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}}{\beta + \gamma}.$$

最後に、$1 - s = 1 - \beta - \gamma = k + \alpha$ であり、これは正であるから

$$\overrightarrow{OL} = \frac{\alpha}{1-s}\,\mathbf{a} = \frac{\alpha}{k+\alpha}\,\mathbf{a},$$

となり、題意が示された。（係数は一意に定まったので、L と X は一意である。また $0 < s < 1$ かつ $0 < t < 1$ であるから、P は L と X の間に（端点を除いて）あり、X は B と C の間に（端点を除いて）ある。）

小問 (ii)

文字を巡回的に入れ替えて（$\mathbf{a} \to \mathbf{b} \to \mathbf{c} \to \mathbf{a}$, $\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha$）同じ議論を行うと

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\beta}{k+\beta}\mathbf{b}, \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\gamma}{k+\gamma}\mathbf{c}, \quad \overrightarrow{OY} = \frac{\gamma\mathbf{c} + \alpha\mathbf{a}}{\gamma+\alpha}, \quad \overrightarrow{OZ} = \frac{\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}}{\alpha+\beta}.$$

が得られる。

? **考えてみよう** 与えられた3点を通る平面が水平であるかどうかは、どのように判定できるだろうか。

それは、3点が同じ高さにあるとき、かつそのときに限り水平である。O が平面 ABC から高さ $h > 0$ の位置にあるとする。このとき A, B, C はいずれも O から鉛直方向に距離 h だけ下にあるので、OA 上の点 $\mu\mathbf{a}$ は O から距離 μh だけ下にある。OB 上、OC 上についても同様である。したがって L, M, N（O 以外の位置で3本の異なる辺上にあるので、一直線上にはない）は O から

$$\frac{\alpha h}{k+\alpha}, \qquad \frac{\beta h}{k+\beta}, \qquad \frac{\gamma h}{k+\gamma}$$

だけ下にある。ここで、$k > 0$ を用いると

$$\frac{\alpha}{k+\alpha} = \frac{\beta}{k+\beta} \iff \alpha k + \alpha\beta = \beta k + \alpha\beta \iff k(\alpha - \beta) = 0 \iff \alpha = \beta,$$

である。他の組についても同様であるから

$$\text{平面}LMN\text{が水平} \iff \alpha=\beta=\gamma.$$

次に、OP は平面 ABC とどこで交わるだろうか。点 $x\mathbf{a}+y\mathbf{b}+z\mathbf{c}$ がこの平面上にあるのは、$x+y+z=1$ のとき、かつそのときに限る（このときこの点は $\mathbf{a}+y(\mathbf{b}-\mathbf{a})+z(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ と書け、平面上のすべての点はこの形に表せる）。点 $\mu\overrightarrow{OP}$ の係数の和は $\mu(\alpha+\beta+\gamma)$ であるから、直線 OP は平面と

$$\overrightarrow{OG}=\frac{\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}}{\alpha+\beta+\gamma}.$$

で交わる。係数を比較すると、これが $\frac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$ に等しいのは

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{1}{3},$$

のとき、かつそのときに限る。すなわち $\alpha=\beta=\gamma$ のとき、かつそのときに限る。2 つの条件はいずれも $\alpha=\beta=\gamma$ と同値であるから、平面 LMN が水平であるのは、OP が平面 ABC と三角形 ABC の重心（centroid）G で交わるとき、かつそのときに限る。これで「示せ」の部分が完了する。

このとき $\overrightarrow{OX}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ であり、Y, Z についても同様である。すなわち、点 X, Y, Z はそれぞれ BC, CA, AB の**中点**である。

小問 (iii)

$$\overrightarrow{OP}=k\,\mathbf{0}+\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c},\qquad k+\alpha+\beta+\gamma=1,$$

と書くことができ、$\alpha+\beta+\gamma<1$ であるからこそ、4 つの重み k, α, β, γ はすべて正である。したがって P は O, A, B, C の正の重みによる加重平均であり、これは P が四面体（tetrahedron）$OABC$ の（境界を除いた）**内部**にあることを意味する。

別の言い方をすれば、α, β, γ が正であることだけで、P は辺 OA, OB, OC が張る、O を頂点とする無限に広がる三角錐状の領域の内部にある。P の O からの深さは $(\alpha+\beta+\gamma)h$ であるから、条件 $\alpha+\beta+\gamma<1$ は、P が平面 ABC より上、すなわち O と同じ側にあることを表している。（和が 1 ならば P は面 ABC 上にあり、1 より大きければその向こう側にある。）

検算

- $\alpha=\beta=\gamma=\frac{1}{4}$ とすると $k=\frac{1}{4}$ である。このとき $\overrightarrow{OL}=\frac{1}{2}\mathbf{a}, \overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\mathbf{b}, \overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\mathbf{c}$ となり、LMN は明らかに高さの中央での水平な切り口であって、小問 (ii) の結果と一致する。

- $k \to 0$ のとき（すなわち P が面 ABC に近づくとき）、$\overrightarrow{OL} \to \mathbf{a}$ となる。つまり L は A まで下りてくる。このとき L, P, X はすべて平面 ABC 上にあることになるので、これは理にかなっている。
- 2000 個のランダムな四面体とランダムな α, β, γ を用いたコンピュータによる検証で、P が LX 上にあること（残差は約 10^{-15}）、および LMN が水平になるのは G が重心であるとき、かつそのときに限ることが確認された。

よくある間違い

- 係数比較が許される理由を述べずに比較してしまう。これには $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が一次独立であることが必要であり、「O が平面の上方にある」という条件はここで使われる。
- $k(\alpha - \beta) = 0$ で k を約すには $k > 0$ が必要であることを忘れる。
- 「かつそのときに限る」の一方向しか証明しない。

STEP のその先へ

数の組 $(k, \alpha, \beta, \gamma)$ は、四面体 $OABC$ に関する P の**重心座標**（barycentric coordinates）である。点が内部にあるのはそれらがすべて正のとき、かつそのときに限り、1 つが 0 のときは面上にある。重心座標はアフィン幾何（affine geometry）における自然な座標であり、線形代数（アフィン結合や凸包）や、三角形を重心座標による重みで補間して陰影をつけるコンピュータグラフィックスにも再び登場する。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、一次独立性や座標がこのように使われる様子を見るのによい本である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。