解答例

STEP III 2025、第 4 問

純粋数学 • 曲線の変換

STEP III 2025、問 4

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

平面の写像 T が逆写像（inverse）をもつとする。このとき、曲線 $f(T^{-1}(x,y)) = 0$ は曲線 $f(x,y) = 0$ の T による像である。なぜなら、ある点が新しい曲線上にあるのは、T^{-1} がその点を元の曲線上に移すときであり、かつそのときに限るからである。小問 (i) では、これを回転（rotation）について示す。小問 (ii) では同じことを鏡映（reflection）について行う。この場合は $T^{-1} = T$ である。小問 (iii) では、置き換え $u = x - 2y$ によって方程式が $y = \sin x$ の水平方向のせん断（shear）に変わることに気づけばよい。そうすれば媒介変数表示（parametrisation）によって、陰関数微分（implicit differentiation）の面倒なしに接線（tangent）が求められる。

解答

小問 (i)

行列の積を計算すると

$$x_2 = \frac{x_1 - y_1}{\sqrt{2}}, \qquad y_2 = \frac{x_1 + y_1}{\sqrt{2}}.$$

となる。G_2 の方程式に含まれる二つの括弧に $(x,y) = (x_2, y_2)$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{y_2}{\sqrt{2}} &= \frac{(x_1 - y_1) + (x_1 + y_1)}{2} = x_1, \\ -\frac{x_2}{\sqrt{2}} + \frac{y_2}{\sqrt{2}} &= \frac{-(x_1 - y_1) + (x_1 + y_1)}{2} = y_1. \end{aligned}$$

となる。したがって、G_2 の方程式の左辺に (x_2, y_2) を代入した値は $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4}$ である。(x_1, y_1) は G_1 上にあるから、これは 1 に等しい。ゆえに (x_2, y_2) は G_2 上にある。

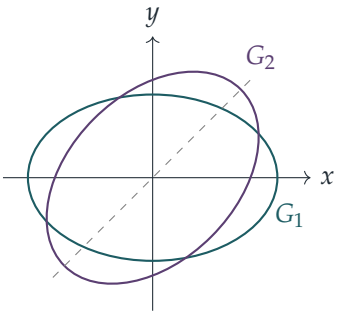
回転については、$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \sin 45^\circ$ であることに注意すると、行列は

$$R = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix},$$

であり、これは原点のまわりの反時計回りの 45° の回転である。いま示したのは、R が G_1 のすべての点を G_2 上に移すということである。G_2 が回転した曲線とちょうど一致することを示すには、G_2 のすべての点が G_1 の点から来ていることも必要である。G_2 上の任意の点 (x, y) をとり、

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}}, \qquad y_1 = -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}},$$

とおく。これは $R^{-1}(x, y)$（45° だけ逆向きに回転したもの）である。G_2 の方程式は、まさに $\frac{x_1^2}{9} + \frac{y_1^2}{4} = 1$ ということを述べているので、$(x_1, y_1) \in G_1$ であり、しかも $R(x_1, y_1) = (x, y)$ である。したがって $G_2 = R(G_1)$ である。すなわち、楕円（ellipse）G_2 は G_1 を原点のまわりに反時計回りに 45° 回転したものである。



小問 (ii)(a)

行列を M とおく。点 (x, y) が不変点（invariant point）であるのは $M\binom{x}{y} = \binom{x}{y}$ のとき、すなわち

$$-0.6x + 0.8y = x, \qquad 0.8x + 0.6y = y.$$

のときである。第 1 式から $0.8y = 1.6x$、よって $y = 2x$ が得られ、第 2 式からは $0.8x = 0.4y$ が得られるが、これは同じ式である。したがって、不変点からなる直線（鏡映の軸）は

$$y = 2x.$$

である。

小問 (ii)(b)

$(X, Y) = M(x, y) = (-0.6x + 0.8y,\ 0.8x + 0.6y)$ とおく。第 2 の方程式はちょうど

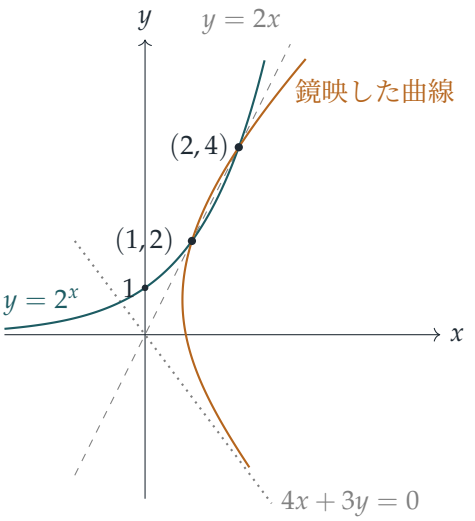
$$Y = 2^X.$$

を意味している。よって、(x,y) が第 2 のグラフ上にあるのは、$M(x,y)$ が $y=2^x$ 上にあるとき、かつそのときに限る。鏡映はそれ自身で元に戻る（$M^2=I$ であることは、積を計算すれば確かめられる）ので、$(x,y)=M(X,Y)$ である。これは小問 (i) と同じ議論であり、第 2 のグラフは $y=2^x$ を直線 $y=2x$ に関して鏡映したものである。

考えてみよう 鏡映した曲線の漸近線はどこに移るか。また、曲線はどちらの方向へ無限遠に伸びていくか。

$y=2^x$ の特徴を一つずつ鏡映してみよう。

- **漸近線**（*asymptote*）。 $x\to-\infty$ のとき、$y=2^x$ は x 軸に近づく。方向 $(1,0)$ は $M(1,0)=(-0.6,0.8)$ に移るので、x 軸は直線 $4x+3y=0$、すなわち $y=-\frac{4}{3}x$ に移る。同じことだが、$Y=0.8x+0.6y=2^X>0$ であるから、鏡映した曲線は $4x+3y>0$ の側に完全に含まれ、$X\to-\infty$ のとき $4x+3y=0$ に近づく。遠方では $y=2^x$ 上の点はおよそ $(X,0)$（X は絶対値の大きな負の数）であり、これらはおよそ $(-0.6X,0.8X)$ に移る。したがって、鏡映した曲線は第 4 象限で漸近線に近づき、そのとき $x\to+\infty$、$y\to-\infty$ となる。
- **鏡映の軸上の点**。鏡映は $y=2x$ 上のすべての点を動かさない。さて、$2^x=2x$ となるのは $x=1$ と $x=2$ のとき（2^x-2x は凸（convex）なので、それ以外にはない）である。よって両曲線はともに $(1,2)$ と $(2,4)$ を通り、そこで交わる。$y=2^x$ に沿ってコンピュータで探索しても、それ以外の共有点は見つからない。
- **その他の点**。 $(0,1)$ は $(0.8,0.6)$ に移る。
- **最も左の点**。鏡映した曲線は $\left(-0.6t+0.8\cdot2^t,\ 0.8t+0.6\cdot2^t\right)$ で表される。その x 座標が最小になるのは $0.8\cdot2^t\ln2=0.6$ のときで、点はおよそ $(0.80,0.74)$ である。そこでは接線が鉛直なので、鏡映した曲線は x の関数のグラフではない。
- **増大の様子**。 $X\to+\infty$ のとき、点 $(X,2^X)$ はおよそ $2^X(0.8,0.6)$ に移る。よって曲線は右上に向かい、おおよそ傾き $\frac{3}{4}$ の方向に伸びていく。



小問 (iii)

$0 \le x \le 2\pi$ における $y = \sin x$ のグラフは、おなじみの一つの波である。

$y = \sin(x - 2y)$ については、$u = x - 2y$ とおく。点 (x, y) が曲線上にあるのは $y = \sin u$ のとき、かつそのときに限り、このとき $x = u + 2y$ である。よって曲線はちょうど

$$x = u + 2\sin u, \qquad y = \sin u.$$

である。これは $y = \sin x$ の各点を、その高さの 2 倍だけ横にずらしたもの、すなわち水平方向のせん断 $(u, v) \mapsto (u + 2v, v)$ である。

どの u に対して $0 \le x \le 2\pi$ となるか。 $x(u) = u + 2\sin u$ とおく。すると $x(-u) = -x(u)$ かつ $x(u + 2\pi) = x(u) + 2\pi$ である。$x'(u) = 1 + 2\cos u$ であるから、関数 $x(u)$ は $[0, \frac{2\pi}{3}]$ において 0 から $\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3} \approx 3.83$ まで増加し、その後 $[\frac{2\pi}{3}, \pi]$ において π まで減少する。よって $0 < u \le \pi$ のとき値は $(0, 2\pi)$ に含まれ、$[\pi, 2\pi]$ では対称性 $x(2\pi - u) = 2\pi - x(u)$ により値は $(0, 2\pi]$ に収まる。$u > 2\pi$ のときは帰納法（induction）により $x(u) = x(u - 2\pi) + 2\pi > 2\pi$ となり、$u < 0$ のときは奇関数であること（oddness）から $x(u) < 0$ となる。したがって、求める曲線の部分は、u が 0 から 2π まで動くとき、$(0, 0)$ から $(2\pi, 0)$ までちょうど一度だけ描かれる。

接線。 曲線に沿って

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 1 + 2\cos u, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = \cos u, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\cos u}{1 + 2\cos u}.$$

である。$\cos u = 0$ のとき $1 + 2\cos u = 1$ となるので、これら二つの導関数が同時に 0 になることはない。

- 水平な接線は $\cos u = 0$、すなわち $u = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ のところに現れる：

$$\left(\tfrac{\pi}{2} + 2,\ 1\right) \quad \text{および} \quad \left(\tfrac{3\pi}{2} - 2,\ -1\right).$$

- 鉛直な接線は $\cos u = -\frac{1}{2}$、すなわち $u = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$ のところに現れる：

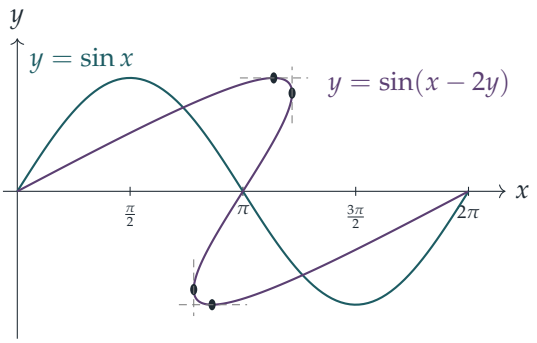
$$\left(\tfrac{2\pi}{3} + \sqrt{3},\ \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{および} \quad \left(\tfrac{4\pi}{3} - \sqrt{3},\ -\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

数値的には、これらはおよそ $(3.57, 1)$、$(2.71, -1)$、$(3.83, 0.87)$、$(2.46, -0.87)$ である。

考えてみよう 頂上の水平な接線は $x \approx 3.57$ にあるが、曲線はその後さらに $x \approx 3.83$ まで達する。曲線は実際にはどのような形をしているのだろうか。

u を 0 から 2π まで追ってみよう。曲線は原点を傾き $\frac{1}{3}$（$u = 0$ を代入）で出発するが、これは $y = \sin x$ よりも緩やかである。曲線は最大点 $(\frac{\pi}{2} + 2, 1)$ まで上り、その後右下へ進んで $(\frac{2\pi}{3} + \sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ の鉛直な接線に達する。そこから左へ折り返し、傾き $\frac{-1}{-1} = 1$ で $(\pi, 0)$ を通過する。2 番目の鉛直な接線 $(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2})$ に達すると右へ向きを変えて最小点 $(\frac{3\pi}{2} - 2, -1)$ を通り、$(2\pi, 0)$ まで上っていく。曲線は砕ける波のように覆いかぶさる形をしている。$x \approx 2.46$ と $x \approx 3.83$ の間では、各 x に対して y の値が三つある。図全体は $(\pi, 0)$ に関して点対称（half-turn symmetry）である。

参考までに、二つのグラフが交わるのは $\sin x = \sin(x - 2\sin x)$ となるところである。$\sin x = 0$ ならば $x = 0, \pi, 2\pi$ であり、そうでなければ $x - \sin x = \frac{\pi}{2}$ または $\frac{3\pi}{2}$ で、$x \approx 2.31$ と $x \approx 3.97$ が得られる。



検算

- 小問 (i)：G_1 の頂点 $(3, 0)$ をとる。これは $(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{3}{\sqrt{2}})$ に移り、G_2 の方程式の二つの括弧はそれぞれ 3 と 0 になるので、左辺は 1 である。
- 小問 (ii)：$M\binom{1}{2} = \binom{-0.6+1.6}{0.8+1.2} = \binom{1}{2}$ であり、不変点として当然の結果である。点 $(1, 2)$ は第 2 の方程式も満たす：$0.8 + 1.2 = 2 = 2^{-0.6+1.6}$。

- 小問 (iii)：$(\frac{\pi}{2}+2, 1)$ では $x-2y=\frac{\pi}{2}$ となり、$\sin\frac{\pi}{2}=1=y$ である。同様に $(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ では $x-2y=\frac{2\pi}{3}$ となり、$\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ である。陰関数微分により $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos(x-2y)}{1+2\cos(x-2y)}$ が得られる。その分子は第 1 の点で 0 となり、分母は第 2 の点で 0 となる。

よくある間違い

- G_1 が G_2 の**中に**写されることだけを示してしまう。G_2 が回転した曲線**そのもの**であると言うには、G_2 のすべての点が G_1 から来ていることも必要であり、それには逆写像を使う。
- $y=\sin(x-2y)$ を x の関数として扱ってしまい、覆いかぶさる部分のない一つの波として曲線を描いてしまう。鉛直な接線は、まさに曲線が折り返す場所である。
- 鏡映した指数関数のグラフが斜めの漸近線 $4x+3y=0$ をもち、その片側に完全に含まれることを忘れてしまう。

STEP のその先へ

この問題の背後にある原理は、可逆な写像 T を曲線 $f(x,y)=0$ に施すと曲線 $f\left(T^{-1}(x,y)\right)=0$ が得られる、ということである。大学 1 年次の線形代数（linear algebra）の講義では、これは基底変換（change of basis）によって二次形式（quadratic form）がどのように変わるかという研究になる。座標軸を回転させて円錐曲線（conic）から xy の項を消去することは、対称行列（symmetric matrix）の対角化（diagonalising）の 2 次元の場合にあたる。ストラング（Strang）の *Introduction to Linear Algebra*（線形代数入門）は、回転、鏡映とそれらの固有ベクトル（eigenvector）（(ii)(a) の不変な直線は固有値（eigenvalue）1 に対する固有ベクトルである）を非常に読みやすく扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。