解答例

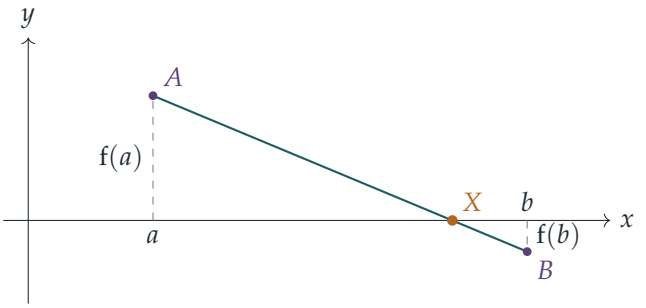
STEP III 2025、第 3 問

純粋数学 • 平均の不等式

> **STEP III 2025、問 3**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

A は軸の上側に、B は下側にあるので、交点 X は AB を二つの高さの比 $\mathrm{f}(a) : \mathrm{f}(b)$ に分ける。したがって m は a と b の**加重平均**（weighted average）であり、以下の議論はすべて、f を変えたときに重みがどう変わるかについてのものである。m をただ一つの比 $\mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b)$ の関数として書いてしまえば、f の二つの選び方を比べることは、二つの数を比べることに帰着する。



解答

小問 (i)

A、その足 $(a,0)$、X がつくる三角形と、B、その足 $(b,0)$、X がつくる三角形は相似（similar）である（X における対頂角が等しく、足ではともに直角である）。よって

$$\frac{m-a}{b-m} = \frac{\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(b)} \quad \Longrightarrow \quad m\,\mathrm{f}(b) - a\,\mathrm{f}(b) = b\,\mathrm{f}(a) - m\,\mathrm{f}(a),$$

したがって

$$\boxed{m = \frac{a\,\mathrm{f}(b) + b\,\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(a) + \mathrm{f}(b)}}.$$

（$\mathrm{f} > 0$ であるから分母は正である。直線の方程式 $y - \mathrm{f}(a) = -\frac{\mathrm{f}(a)+\mathrm{f}(b)}{b-a}(x-a)$ に $y = 0$ を代入しても同じ答えが得られる。）

$r = \mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b) > 0$ とおき、分子と分母を $\mathrm{f}(b)$ で割って書き直しておくとよい：

$$m = \frac{a + br}{1 + r} = b - \frac{b - a}{1 + r}. \qquad (*)$$

小問 (ii)

$\mathrm{f}(x) = \sqrt{x}$ のとき、

$$m = \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}\,(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \sqrt{ab},$$

となり、示すべき式が得られる。

二つ目の目標については、分子 $a^{n+1} + b^{n+1}$ は、分母を払った後の $a\,\mathrm{f}(b) + b\,\mathrm{f}(a)$ から出てくるはずであり、これは $\mathrm{f}(b)$ が b^{-n} のように振る舞うべきことを示唆している。そこで、$x > 0$ で正の値をとる $\mathrm{f}(x) = x^{-n}$ を試すと、

$$m = \frac{ab^{-n} + ba^{-n}}{a^{-n} + b^{-n}} = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{b^n + a^n},$$

となる。ここで分子と分母に $a^n b^n$ を掛けた。したがって $\mathrm{f}(x) = x^{-n}$ でよい（m は比 $\mathrm{f}(a)/\mathrm{f}(b)$ のみに依存するので、その正の定数倍でもよい）。$n = -\frac{1}{2}$ とすると一つ目の結果が再び得られることに注意しよう。

小問 (iii)

$r_1 = \mathrm{g}_1(a)/\mathrm{g}_1(b)$、$r_2 = \mathrm{g}_2(a)/\mathrm{g}_2(b)$ とおく。どちらも正である。$(*)$ より $M_i = b - \dfrac{b-a}{1+r_i}$ である。$b - a > 0$ であるから、式 $b - \frac{b-a}{1+r}$ は $r > 0$ において r について狭義単調増加（strictly increasing）である。よって $r_1 > r_2$ を示せば十分である。

> **考えてみよう** 関数 $\mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2$ に関する条件は、どのようにして r_1 と r_2 に関する条件に変わるのだろうか？

$h = \mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2$ とおく。すると

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\mathrm{g}_1(a)\,\mathrm{g}_2(b)}{\mathrm{g}_1(b)\,\mathrm{g}_2(a)} = \frac{h(a)}{h(b)} > 1,$$

である。h は減少関数（decreasing）であり $a < b$ であるから、$h(a) > h(b) > 0$ となるからである。$r_2 > 0$ なので $r_1 > r_2$ が得られ、したがって $M_1 > M_2$ である。

これを用いて。m の値がそれぞれ三つの平均になるような三つの関数が必要である。

- $\mathrm{f}(x) = 1$（定数）のとき $m = \dfrac{a+b}{2}$ となる。
- $\mathrm{f}(x) = \sqrt{x}$ のとき、小問 (ii) より $m = \sqrt{ab}$ となる。
- $\mathrm{f}(x) = x$ のとき $m = \dfrac{ab+ba}{a+b} = \dfrac{2ab}{a+b}$ となる。

ここで、いま証明した結果を二回用いる。$\mathrm{g}_1 = 1$、$\mathrm{g}_2 = \sqrt{x}$ とすると、比 $\mathrm{g}_1/\mathrm{g}_2 = x^{-1/2}$ は $x > 0$ で減少するので、$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$ である。$\mathrm{g}_1 = \sqrt{x}$、$\mathrm{g}_2 = x$ とすると、比はやはり $x^{-1/2}$ で減少するので、$\sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}$ である。合わせると

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab} > \frac{2ab}{a+b}.$$

小問 (iv)

曲線は A と B を通るので

$$\mathrm{f}(a) = p(c-a)^3, \qquad -\mathrm{f}(b) = p(c-b)^3, \text{ すなわち } \mathrm{f}(b) = p(b-c)^3.$$

$\mathrm{f}(b) > 0$ であるから $p \neq 0$ かつ $b \neq c$ であり、割り算をしてよい：

$$\frac{\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(b)} = \left(\frac{c-a}{b-c}\right)^3.$$

すべての実数はただ一つの実数の立方根（cube root）をもつので、立方根をとる操作は可逆であり、

$$\frac{c-a}{b-c} = \left(\frac{\mathrm{f}(a)}{\mathrm{f}(b)}\right)^{1/3},$$

となって、示すべき式が得られる。右辺を k とおくと（$k > 0$）、$c - a = k(b-c)$ より $c(1+k) = a + kb$ であり、

$$c = \frac{a+kb}{1+k} = \frac{a\,\mathrm{f}(b)^{1/3} + b\,\mathrm{f}(a)^{1/3}}{\mathrm{f}(a)^{1/3} + \mathrm{f}(b)^{1/3}},$$

となる。ここで分子と分母に $\mathrm{f}(b)^{1/3}$ を掛けた。

考えてみよう この公式は以前どこかで見なかっただろうか？

これは小問 (i) の公式で f を $\mathrm{f}^{1/3}$ に置き換えたものにほかならず、この関数も $x > 0$ で定義され正の値をとる。したがって c は関数 $\mathrm{f}^{1/3}$ に対する m の値である。$\mathrm{g}_1 = \mathrm{f}$、

$g_2 = f^{1/3}$ として小問 (iii) を適用する：

$$\frac{g_1(x)}{g_2(x)} = f(x)^{2/3}.$$

f が減少関数で正の値をとるならば、$t \mapsto t^{2/3}$ は $t > 0$ で増加するので、$f^{2/3}$ も減少関数で正の値をとる。よって小問 (iii) より $M_1 > M_2$ が得られる。ここで $M_1 = m$（f 自身に対するもの）、$M_2 = c$ である。したがって $c < m$ である。

検算

- $a = 1$、$b = 4$ とする。三つの平均は $2.5 > 2 > 1.6$ であり、$f = \sqrt{x}$ のとき $m = (1 \cdot 2 + 4 \cdot 1)/3 = 2 = \sqrt{4}$ となる。
- $f(x) = 1/x$、$a = 1$、$b = 4$ のとき：$m = \frac{1/4+4}{5/4} = 3.4$ であり、一方 $k = 4^{1/3} \approx 1.587$ から $c \approx 2.84 < 3.4$ となり、小問 (iv) の予測どおりである。m も c も、加重平均である以上当然ながら、a と b の間にある。
- 小問 (ii) で $n = 0$ とすると $f = 1$ かつ $m = \frac{a+b}{2}$ となり、$n = -1$ とすると $f = x$ かつ $m = \frac{2ab}{a+b}$ となって、小問 (iii) と整合する。

これらに加え、a、b、f を多数選んですべての結果をランダムに検証し、コンピュータで確認した。

よくある間違い

- B の高さが $-f(b)$ であることを忘れること。すると分母が $f(b) - f(a)$ となり、得られる点が a と b の間にあるとは限らなくなる。
- 小問 (iii) で、ただ一つの比 r に帰着させずに、四つの関数値を一度にたすき掛けして M_1 と M_2 を比べようとすること。
- 小問 (iv) で、$g_1 = f^{1/3}$、$g_2 = f$ と逆の順にとること：このときの比 $f^{-2/3}$ は**増加関数**なので、その順では小問 (iii) を適用できない。

STEP のその先へ

ここで現れた m はどれも加重平均 $\lambda a + (1-\lambda)b$ であり、小問 (iii) は、n とともに増加する冪平均（power means）の族 $\left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)/\left(a^n + b^n\right)$（レーマー平均（Lehmer means））全体を順序づける鮮やかな方法になっている。平均の間の不等式と、その背後にある凸性（convexity）の議論は、大学一年次の解析学（analysis）の定番であ

る。Abbott の *Understanding Analysis*（解析学入門）や Siklos の *Advanced Problems in Mathematics*（STEP 対策の問題集）は、この種の議論をさらに学ぶのに適している。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。