解答例

STEP III 2025、第 2 問

純粋数学　•　関数の反復合成と周期性

STEP III 2025、問 2

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

この問題は、*Beyond STEP* の第 8.8 節「**周期 3 ならばカオス**」で詳しく解説されている：
https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/ch08/period-three.html

鍵となる考え方

この問題に現れる関数はすべて直線をつなぎ合わせてできているので、問題全体は「いまどの区間（piece）の上にいるか」を見失わないことに尽きる。$\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ と $\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$ を区間ごとに求め、内側の関数の符号を用いて絶対値（modulus）を一つずつ外していく。そのうえで、数列に関する問いは逆向きに読む。すなわち、$\mathrm{f}^n(x) = x$ の解とは n 回の操作で自分自身に戻ってくる初期値のことであり、また 7 より小さいすべての数は f による逆像（preimage）をちょうど二つもち、それらは互いに符号が反対である。

解答

以下、$\mathrm{f}^2(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(x))$ および $\mathrm{f}^3(x) = \mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)))$ と書く。f は $|x|$ のみに依存するので、三つの関数はすべて偶関数（even function）である。したがって $x \geq 0$ の範囲で考え、y 軸に関して折り返せば十分である。

小問 (i)

(a) $y = \mathrm{f}(x)$ のグラフは頂点 $(0, 7)$、傾き（gradient）∓ 2 の逆 V 字形であり、x 軸と $x = \pm\frac{7}{2}$ で交わる。

f^2 を求めるには $\mathrm{f}(x)$ の符号が必要である。$0 \leq x \leq \frac{7}{2}$ ならば $\mathrm{f}(x) = 7 - 2x \geq 0$ である

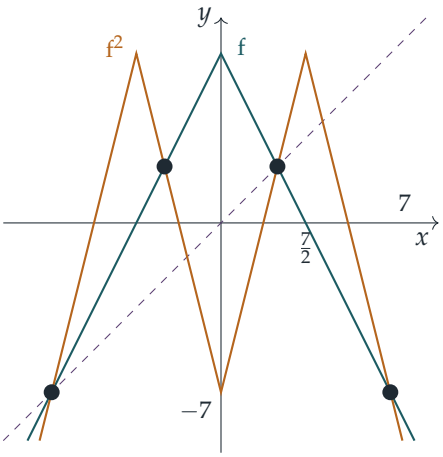
から

$$\mathrm{f}^2(x) = 7 - 2(7 - 2x) = 4x - 7.$$

$x \geq \frac{7}{2}$ ならば $\mathrm{f}(x) \leq 0$ であるから $|\mathrm{f}(x)| = 2x - 7$ となり

$$\mathrm{f}^2(x) = 7 - 2(2x - 7) = 21 - 4x.$$

よって $y = \mathrm{f}^2(x)$ は W 字形である。$x = 0$ で値 -7 をとり、$x = \pm\frac{7}{2}$（ちょうど f の零点）で高さ 7 の山をもち、傾きは ± 4、x 切片は $\pm\frac{7}{4}$ と $\pm\frac{21}{4}$ である。$7 - 2x = 4x - 7$ と $7 - 2x = 21 - 4x$ を解くと、二つのグラフは $(\pm\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$ と $(\pm 7, -7)$ で交わることがわかる。



（青緑：$y = \mathrm{f}(x)$、琥珀色：$y = \mathrm{f}^2(x)$、破線：$y = x$。）

(b) 四つの区間それぞれで方程式を解き、その区間内にある解だけを残す。

- $0 \leq x \leq \frac{7}{2}$：$4x - 7 = x$ より $x = \frac{7}{3}$ であり、これは範囲内にある。
- $x \geq \frac{7}{2}$：$21 - 4x = x$ より $x = \frac{21}{5} = 4.2$ であり、範囲内にある。
- $-\frac{7}{2} \leq x \leq 0$：ここでは $\mathrm{f}^2(x) = -4x - 7$ であり、$-4x - 7 = x$ より $x = -\frac{7}{5}$、範囲内にある。
- $x \leq -\frac{7}{2}$：ここでは $\mathrm{f}^2(x) = 21 + 4x$ であり、$21 + 4x = x$ より $x = -7$、範囲内にある。

よって $\mathrm{f}(\mathrm{f}(x)) = x$ の解はちょうど四つであり、

$$x = -7, \quad -\frac{7}{5}, \quad \frac{7}{3}, \quad \frac{21}{5}.$$

(c) 数列が周期（period）2 をもつのは、$u_2 = u_0$、すなわち $\mathrm{f}^2(a) = a$ であり、かつ $u_1 \neq u_0$、すなわち $\mathrm{f}(a) \neq a$ であるとき、かつそのときに限る。

考えてみよう (b) の四つの答えはすべて周期 2 の数列を与えるだろうか？

そうではない。そのうち二つは f 自身の不動点（fixed point）である：$\mathrm{f}(\frac{7}{3}) = 7 - \frac{14}{3} = \frac{7}{3}$、$\mathrm{f}(-7) = 7 - 14 = -7$。これらは定数数列を与え、その周期は 1 である。残りの二つは互いに入れ替わる：

$$\mathrm{f}\big(-\tfrac{7}{5}\big) = 7 - \tfrac{14}{5} = \tfrac{21}{5}, \qquad \mathrm{f}\big(\tfrac{21}{5}\big) = 7 - \tfrac{42}{5} = -\tfrac{7}{5}.$$

よって数列が周期 2 をもつのは $a = -\frac{7}{5}$ または $a = \frac{21}{5}$ のとき、かつそのときに限る。

(d) $a = \frac{28}{5}$ のとき、

$$u_1 = 7 - \tfrac{56}{5} = -\tfrac{21}{5}, \qquad u_2 = 7 - \tfrac{42}{5} = -\tfrac{7}{5}, \qquad u_3 = \mathrm{f}\big(-\tfrac{7}{5}\big) = \tfrac{21}{5}.$$

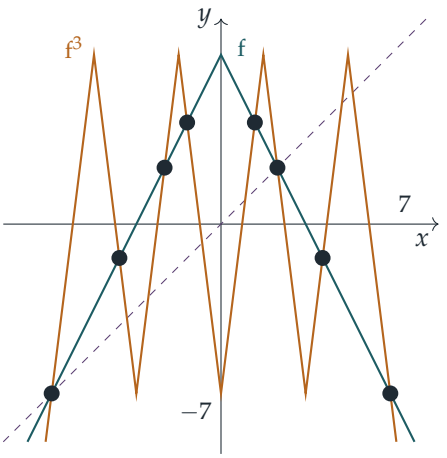
u_2 以降、この数列は小問 (c) の $-\frac{7}{5}$ から始まる数列と一致するので、$u_2, u_3, u_4, \ldots$ は $-\frac{7}{5}, \frac{21}{5}, -\frac{7}{5}, \ldots$ となり、周期 2 をもつ。最後に、$u_0 = \frac{28}{5}$ と $u_1 = -\frac{21}{5}$ はどちらも $u_2 = -\frac{7}{5}$ とも $u_3 = \frac{21}{5}$ とも異なる。（$u_0 \neq u_2$ と $u_1 \neq u_3$ だけでなく、四つの組すべてを確かめる必要がある。）これが求めるものであった。

小問 (ii)

(a) 次に $\mathrm{f}^2(x)$ に f を適用する。その際、f^2 の各区間を符号が変わる点 $x = \frac{7}{4}$ と $x = \frac{21}{4}$ で分割する。$x \geq 0$ に対して

$$\mathrm{f}^3(x) = 7 - 2\big|\mathrm{f}^2(x)\big| = \begin{cases} 7 + 2(4x - 7) = 8x - 7, & 0 \leq x \leq \frac{7}{4}, \\ 7 - 2(4x - 7) = 21 - 8x, & \frac{7}{4} \leq x \leq \frac{7}{2}, \\ 7 - 2(21 - 4x) = 8x - 35, & \frac{7}{2} \leq x \leq \frac{21}{4}, \\ 7 + 2(21 - 4x) = 49 - 8x, & x \geq \frac{21}{4}. \end{cases}$$

したがってグラフは傾き ± 8 で -7 と 7 の間をジグザグに往復する。谷は $(0, -7)$ と $(\pm\frac{7}{2}, -7)$、山は $(\pm\frac{7}{4}, 7)$ と $(\pm\frac{21}{4}, 7)$ にあり、$|x| > \frac{21}{4}$ では下がっていく。各区間の式を $7 - 2x$ と等置して解くと、$y = \mathrm{f}(x)$ とは $(\pm\frac{7}{5}, \frac{21}{5})$、$(\pm\frac{7}{3}, \frac{7}{3})$、$(\pm\frac{21}{5}, -\frac{7}{5})$ および $(\pm 7, -7)$ で交わる。



（青緑：$y = \mathrm{f}(x)$、琥珀色：$y = \mathrm{f}^3(x)$、破線：$y = x$。）

(b) $a = 1$ から始めると、$u_1 = 7 - 2 = 5$、$u_2 = 7 - 10 = -3$、$u_3 = 7 - 6 = 1$ となる。$a = -\frac{7}{9}$ から始めると

$$u_1 = 7 - \tfrac{14}{9} = \tfrac{49}{9}, \qquad u_2 = 7 - \tfrac{98}{9} = -\tfrac{35}{9}, \qquad u_3 = 7 - \tfrac{70}{9} = -\tfrac{7}{9}.$$

よってどちらの数列も三段階で出発点に戻る。すなわち、これらは長さ 3 のサイクル（cycle）$1 \to 5 \to -3 \to 1$ と $-\frac{7}{9} \to \frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9}$ である。

初期値だけでなく、長さ 3 のサイクルのすべての項が $\mathrm{f}^3(x) = x$ を満たすので、これにより六つの解 $1, 5, -3, -\frac{7}{9}, \frac{49}{9}, -\frac{35}{9}$ が得られる。また、f の不動点はどれも $\mathrm{f}^3(x) = x$ を満たすので、小問 (i) で求めた $\frac{7}{3}$ と -7 が加わる。これで相異なる解が八つになる。

考えてみよう これ以上解がないことはどうしてわかるのか？

(ii)(a) の式から、f^3 は八つの線分（$x \geq 0$ における四つとその鏡像）からなり、それぞれの傾きは ± 8 である。どの線分も $y = x$ と平行でないので、各線分は直線 $y = x$ と高々一回しか交わらず、解は高々八つである。八つ見つかったので、$\mathrm{f}(\mathrm{f}(\mathrm{f}(x))) = x$ の解全体は

$$x = -7, \quad -\tfrac{35}{9}, \quad -3, \quad -\tfrac{7}{9}, \quad 1, \quad \tfrac{7}{3}, \quad 5, \quad \tfrac{49}{9}.$$

（図もこれと一致する：破線は八つの琥珀色の線分それぞれと一回ずつ交わっている。）

(c) (i)(d) の考え方をまねて、長さ 3 のサイクルから逆向きにたどる。$\mathrm{f}(y) = c$ は $|y| = \frac{1}{2}(7 - c)$ を意味するので、$c < 7$ であるどの数もちょうど二つの逆像 $\pm\frac{1}{2}(7 - c)$ をもつ。サイクル $1 \to 5 \to -3 \to 1$ から $u_3 = 1$ をとる。サイクル内での 1 の逆像は -3 であるから、サイクルから外れるためにもう一方の逆像 $u_2 = 3$ を選ぶ。これはサイクルに含まれない。すると

$$\mathrm{f}(u_1) = 3 \;\Rightarrow\; |u_1| = 2, \quad \text{とる：} u_1 = 2; \qquad \mathrm{f}(u_0) = 2 \;\Rightarrow\; |u_0| = \tfrac{5}{2}, \quad \text{とる：} u_0 = \tfrac{5}{2}.$$

よって $a = \frac{5}{2}$ が条件を満たす。順方向に確かめると

$$\tfrac{5}{2},\ 2,\ 3,\ 1,\ 5,\ -3,\ 1,\ 5,\ -3,\ \ldots$$

u_3 以降、数列はサイクル $1, 5, -3$ を回り続けて周期 3 をもち、一方 $u_0, u_1, u_2 = \frac{5}{2}, 2, 3$ はいずれも 1、5、-3 と異なる。

（他の選び方でもよい。例えば $a = -\frac{5}{2}$ や $a = \pm\frac{9}{2}$ はいずれも $u_1 = -2$ に至り、$a = \frac{3}{2}$ は $u_2 = -1$ を経て $u_3 = 5$ でサイクルに入る。）

検算

- 主張した各解は手で反復計算して確かめられる。例えば $\frac{49}{9} \to -\frac{35}{9} \to -\frac{7}{9} \to \frac{49}{9}$、また $\frac{28}{5} \to -\frac{21}{5} \to -\frac{7}{5} \to \frac{21}{5} \to -\frac{7}{5}$ である。
- $-30 \le x \le 30$ の範囲で $\mathrm{f}^3(x) - x$ をコンピュータで走査すると、符号の変化は -7、-3.889、-3、-0.778、1、2.333、5 および 5.444 の近くでのみ見つかり、八つの解と一致する。$\mathrm{f}^2(x) - x$ について同様に走査すると、-7、-1.4、2.333、4.2 のみが見つかる。
- 個数の確認：f^n は傾き $\pm 2^n$ の 2^n 個の線分からなるので、$\mathrm{f}^n(x) = x$ は 2^n 個の解をもつ。$n = 2$ のときは $4 = 2 + 2$（二つの不動点と長さ 2 のサイクル一つ）、$n = 3$ のときは $8 = 2 + 3 + 3$（二つの不動点と長さ 3 のサイクル二つ）である。

よくある間違い

- (i)(c) で (i)(b) の四つの解をすべて答えてしまう。不動点は周期 1 を与える。
- (ii)(b) で 1 と $-\frac{7}{9}$ だけを挙げる、あるいは不動点 $\frac{7}{3}$ と -7 も $\mathrm{f}^3(x) = x$ を満たすことを忘れる。
- 図の中でグラフの交点の位置を誤る。交点を代数的に求めればこれは防げる。

STEP のその先へ

これは離散力学系（discrete dynamical system）への最初の入り口である。f は傾き 2 のテント写像（tent map）なので、f^n は 2^n 個の区間からなり、そのためあらゆる周期の周期点（periodic point）が存在する。この写像はカオス的な振る舞い（chaotic behaviour）の標準的な例である。シャルコフスキー（Sharkovskii）の定理によれば、直線上の連続写像が周期 3 の点をもつならば、あらゆる周期の点が存在しなければならない。これが「周期三はカオスを意味する」という有名な標語である。ストロガッ

ツ（Strogatz）の *Nonlinear Dynamics and Chaos*（非線形力学とカオス）は、反復写像（iterated map）へのわかりやすい入門書である。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。