解答例

STEP III 2025、第 12 問

確率・統計 ・ 再帰的に定まる確率変数

> **STEP III 2025、問 12**
>
> 先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：
>
> www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

小問 (i) は、一つの二重和（double sum）を二通りに書いただけのものである。両辺とも同じ組 (r,s) の集合にわたって $\mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s)$ を足し合わせており、一方は行ごとに、もう一方は列ごとに数えている。小問 (ii) では、直前の値 X_{n-1} で条件付けると、各確率 $\mathrm{P}(X_n = r)$ がちょうど (i) の左辺に現れる形の和として表される。そこで和をとる順序を入れ替えると、$\mathrm{E}(X_n)$ が $\mathrm{E}(X_{n-1})$ を用いて表せる形になる。

解答

小問 (i)

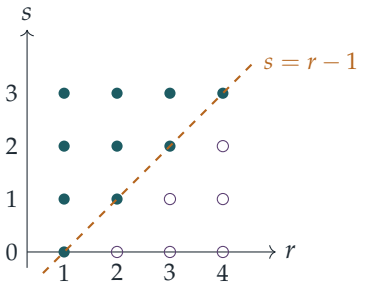
括弧を展開すると、左辺は

$$\sum_{r=1}^{m+1}\ \sum_{s=r-1}^{m} \mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s),$$

となる。これは

$$1 \le r \le m+1 \quad \text{かつ} \quad r-1 \le s \le m.$$

を満たすすべての整数の組 (r,s) にわたる $\mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s)$ の和である。同じ組の集合を、先に s を固定して記述し直す。条件から $0 \le s \le m$ が必要であり（$s \ge r-1 \ge 0$ だからである）、そのような s を一つ固定すると、許される r は $1 \le r$ かつ $r \le s+1$ を満たすものである。$s+1 \le m+1$ であるから、このとき $r \le m+1$ という制約は自動的に満たされることに注意する。逆に、$0 \le s \le m$ かつ $1 \le r \le s+1$ を満たす任意の組は元の条件を満たす。下の図は $m = 3$ の場合の組がなす三角形を示している。



列ごとに（r を固定して）足すと左辺が得られ、行ごとに（s を固定して）足すと

$$\sum_{s=0}^{m}\sum_{r=1}^{s+1} \mathrm{f}(r)\,\mathrm{g}(s) = \sum_{s=0}^{m}\Big(\mathrm{g}(s)\sum_{r=1}^{s+1}\mathrm{f}(r)\Big),$$

が得られる。これは右辺であり、示すべきことが示された。和は有限和なので、順序の入れ替えは常に許される。

小問 (ii)(a)

X_1 は等確率で 0 または 1 をとるので、$\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{2}$ である。

X_2 については、X_1 で条件付ける。$X_1 = 0$ ならば X_2 は $\{0,1\}$ 上の一様分布（uniform distribution）に従い、$X_1 = 1$ ならば X_2 は $\{0,1,2\}$ 上の一様分布に従う。全確率の公式（law of total probability）より

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X_2 = 0) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{12},\\
\mathrm{P}(X_2 = 1) &= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{5}{12},\\
\mathrm{P}(X_2 = 2) &= \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6},
\end{aligned}$$

となり、示すべき結果が得られる（三つの和が 1 になることは有用な検算である）。したがって

$$\mathrm{E}(X_2) = 0\cdot\tfrac{5}{12} + 1\cdot\tfrac{5}{12} + 2\cdot\tfrac{1}{6} = \tfrac{3}{4}.$$

小問 (ii)(b)

帰納法（induction）により、X_{n-1} は $\{0,1,\ldots,n-1\}$ の値をとる（各段階でとりうる最大値が一つずつ増える）。$X_{n-1} = s$ のもとで、X_n は $s+2$ 個の値 $0,1,\ldots,s+1$ 上の一様分布に従うので

$$\mathrm{P}(X_n = r \mid X_{n-1} = s) = \begin{cases} \dfrac{1}{s+2}, & 0 \le r \le s+1,\\[2mm] 0, & r > s+1. \end{cases}$$

値 $r=0$ は常にとりうるので、全確率の公式より

$$\mathrm{P}(X_n=0)=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\mathrm{P}(X_{n-1}=s)}{s+2}.$$

$1\le r\le n$ のときは、$s+1\ge r$、すなわち $s\ge r-1$ を満たす s のみが寄与する：

$$\mathrm{P}(X_n=r)=\sum_{s=r-1}^{n-1}\frac{\mathrm{P}(X_{n-1}=s)}{s+2},\qquad r=1,2,\dots,n.$$

（$r=1$ のときこれは $r=0$ のときと同じ和なので、すべての $n\ge 1$ に対して $\mathrm{P}(X_n=0)=\mathrm{P}(X_n=1)$ であり、(a) の二つの値 $\frac{5}{12}$ と一致する。）

小問 (ii)(c)

$p_s=\mathrm{P}(X_{n-1}=s)$ とおく。$r=0$ の項は期待値（expectation）に寄与しないので、(b) より

$$\mathrm{E}(X_n)=\sum_{r=1}^{n}r\,\mathrm{P}(X_n=r)=\sum_{r=1}^{n}\Bigl(r\sum_{s=r-1}^{n-1}\frac{p_s}{s+2}\Bigr).$$

考えてみよう ここで小問 (i) はどのように使えるか？

これは (i) の左辺で $m=n-1$（$n\ge 1$ なので許される）、$\mathrm{f}(r)=r$、$\mathrm{g}(s)=p_s/(s+2)$ としたものである。和の順序を入れ替えると

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X_n)&=\sum_{s=0}^{n-1}\Bigl(\frac{p_s}{s+2}\sum_{r=1}^{s+1}r\Bigr)=\sum_{s=0}^{n-1}\frac{p_s}{s+2}\cdot\frac{(s+1)(s+2)}{2}\\&=\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\,p_s=\frac{1}{2}\Bigl(\sum_{s=0}^{n-1}p_s+\sum_{s=0}^{n-1}s\,p_s\Bigr)\\&=\tfrac{1}{2}\bigl(1+\mathrm{E}(X_{n-1})\bigr),\end{aligned}$$

となる。ここで $\sum p_s=1$ を用いた。これが示すべき結果である。

直観的には次のとおりである。$X_{n-1}=s$ のもとで、$\{0,\dots,s+1\}$ 上の一様分布に従う確率変数の平均は $\frac{1}{2}(s+1)$ であるから、これは形を変えた期待値の繰り返し公式（tower law）にほかならない。

漸化式（recurrence relation）を解くため、$e_n=\mathrm{E}(X_n)$ とおく。両辺から 1 を引くと

$$e_n-1=\tfrac{1}{2}\,(e_{n-1}-1),$$

となるので、e_n-1 は各段階で半分になる。$e_0=0$ であるから $e_n-1=-\bigl(\frac{1}{2}\bigr)^n$、すなわち

$$\mathrm{E}(X_n)=1-\frac{1}{2^n},\qquad n=1,2,\dots.$$

検算

この公式から $\mathrm{E}(X_1) = \frac{1}{2}$、$\mathrm{E}(X_2) = \frac{3}{4}$ が得られ、(a) と一致する。X_n の正確な分布を $n = 15$ まで一段ずつ計算すると、(b) の式と $\mathrm{E}(X_n) = 1 - 2^{-n}$ の両方が確かめられる。たとえば $\mathrm{E}(X_5) = \frac{31}{32} \approx 0.969$ であり、200 000 回の計算機シミュレーションでは 0.967 が得られた。$n \to \infty$ のとき平均は 1 に近づくが、これはもっともらしい。各段階で平均が 1 に向かって半分ずつ引き寄せられるからである。

よくある間違い

- $\mathrm{P}(X_n = r)$ の和を $s = r - 1$ ではなく $s = r$ から始めてしまう。X_n は $X_{n-1} + 1$ まで上がりうるので、値 r には $s = r - 1$ から到達できる。
- (c) で順序を入れ替える際に和の範囲を誤る。入れ替えた後は r が 1 から $s + 1$ まで動き、$\frac{1}{2}(s+1)(s+2)$ が得られて、因数 $s + 2$ がきれいに約分される。
- e_1 を初期値として漸化式を解いたのに $1 - 2^{-(n-1)}$ と書いてしまう。$e_1 = \frac{1}{2}$ と照らし合わせて確認すること。

STEP のその先へ

ここでの過程はマルコフ連鎖（Markov chain）である。X_n の分布は X_{n-1} のみに依存し、(b) は確率ベクトル（probability vector）に推移行列（transition matrix）を掛ける操作の一段分にあたる。(c) の近道は全期待値の公式（law of total expectation）$\mathrm{E}(X_n) = \mathrm{E}\big(\mathrm{E}(X_n \mid X_{n-1})\big)$ であり、これによってこの種の多くの問題が線形漸化式に帰着される。どちらの考え方も Grimmett and Welsh, *Probability: An Introduction*（確率論入門）で展開されている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。