解答例

STEP III 2025、第 10 問

力学 ・ 動く板上の摩擦

STEP III 2025、問 10

先に進む前に、まず問題を読んでおこう。問題は、OCR が配布している 2025 年の STEP 過去問一式（zip ファイル）のうち、STEP III の問題用紙にある：

www.ocr.org.uk/Images/750486-2025-past-papers.zip

鍵となる考え方

まず h についての微分方程式（differential equation）を解く。これは単振動（simple harmonic motion）の方程式であり、板の傾斜角（angle of inclination）が一定の割合 ω で増加することを意味している。角度がわかれば、質点の位置は板に沿って一定の割合の位置にあるので、2 回微分すれば加速度が得られる。力はニュートンの第二法則（Newton's second law）から求まるが、水平・鉛直方向に分解するよりも、板に垂直な方向と板に沿った方向に分解するほうがはるかに見通しがよい。

解答

板を剛体の棒（rigid rod）、P を質点（particle）とみなす。板が水平となす角を θ とする。

小問 (i)

方程式 $\ddot{\mathrm{h}} = -\omega^2 \mathrm{h}$ の一般解（general solution）は $\mathrm{h} = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ である。条件 $\mathrm{h}(0) = 0$ より $a = 0$、$\dot{\mathrm{h}}(0) = b\omega = \omega L$ より $b = L$ であるから、

$$\mathrm{h}(t) = L\sin\omega t.$$

A の高さは h で板の長さは L なので、$\sin\theta = \mathrm{h}/L = \sin\omega t$、よって $\theta = \omega t$ である（$0 \le \omega t \le \frac{\pi}{2}$ の範囲で考える。これが運動の全体である。それ以降は A が高さ L を超えなければならなくなる）。したがって $A = (0, L\sin\omega t)$、$B = (L\cos\omega t, 0)$ である。

点 C は A から B へ向かって割合 s だけ進んだ点なので、$C = A + s(B - A)$ であり、

$$x = sL\cos\omega t, \qquad y = (1-s)L\sin\omega t.$$

前者が求める x 座標であり、後者はそれに対応する y 座標の式である。

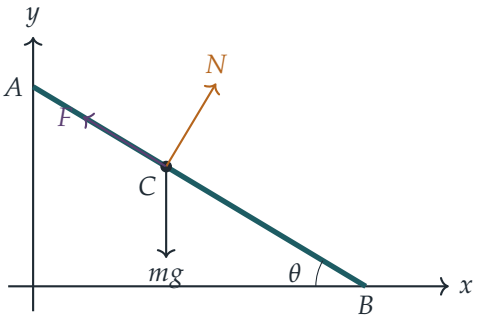
小問 (ii)

t について 2 回微分すると、

$$\ddot{x} = -sL\omega^2 \cos \omega t, \qquad \ddot{y} = -(1-s)L\omega^2 \sin \omega t.$$

小問 (iii)

P にはたらく力は、下向きの重力 mg、板に垂直な（上向きの）垂直抗力（normal reaction）N、板に沿った摩擦力（friction）F である。F は斜面を上る向き、すなわち A へ向かう向きを正とする。



$\theta = \omega t$ として、板に垂直な（上向きの）単位ベクトル（unit vector）は $(\sin\theta, \cos\theta)$、板に沿って A へ向かう単位ベクトルは $(-\cos\theta, \sin\theta)$ である。運動方程式（equation of motion）$m(\ddot{x}, \ddot{y}) = N(\sin\theta, \cos\theta) + F(-\cos\theta, \sin\theta) + (0, -mg)$ をこの 2 方向に分解する（すなわち、それぞれの単位ベクトルとの内積（dot product）をとる）。

板に垂直な方向。

$$\begin{aligned} N - mg\cos\theta &= m(\ddot{x}\sin\theta + \ddot{y}\cos\theta) \\ &= -mL\omega^2(s + (1-s))\sin\theta\cos\theta = -mL\omega^2 \sin\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

$L\omega^2 = kg$ を用いると、

$$N = mg\cos\theta - mgk\sin\theta\cos\theta = mg(1 - k\sin\omega t)\cos\omega t,$$

となり、示すべき式が得られた。

板に沿って A へ向かう方向。

$$\begin{aligned} F - mg\sin\theta &= m(-\ddot{x}\cos\theta + \ddot{y}\sin\theta) \\ &= mL\omega^2(s\cos^2\theta - (1-s)\sin^2\theta) = mgk(s - \sin^2\theta), \end{aligned}$$

ここで $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ を用いた。よって

$$F = mgsk + mg\sin\theta(1 - k\sin\theta) = mgsk + \underbrace{mg(1 - k\sin\theta)\cos\theta}_{N}\tan\theta,$$

すなわち $F = mgsk + N\tan\omega t$ であり、示すべき式が得られた。$N > 0$ であれば常に F は正になることに注意しよう。つまり、P が板に押しつけられている間、摩擦力は常に板を上る向きにはたらく。

小問 (iv)

$\mu = \tan\alpha$ とおく。$N > 0$ である間、質点が滑らずに C にとどまるための必要十分条件は $|F| \le \mu N$ である。このとき $F > 0$ なので、これは $F/N \le \tan\alpha$ となる。小問 (iii) の結果を N で割ると、

$$\frac{F}{N} = \frac{sk}{(1 - k\sin\theta)\cos\theta} + \tan\theta.$$

初めは $\theta = 0$ なので、$N = mg > 0$ かつ $F/N = sk$ である。よって $sk < \tan\alpha$ であれば、最初の時点で質点は滑らない。

? **考えてみよう** N が 0 になる前に、比 F/N が必ず $\tan\alpha$ に達するのはなぜか。

いま $sk < \tan\alpha$ と仮定する。因子 $\cos\theta$ は $\theta = \frac{\pi}{2}$ で 0 になり、$k > 1$ のときは因子 $1 - k\sin\theta$ がそれより早く $\sin\theta = 1/k$ で 0 になる。$N = 0$ となる最初の角を θ_0 とする（$\frac{\pi}{2}$ または $\arcsin(1/k)$ のいずれか）。$0 \le \theta < \theta_0$ では $N > 0$ であり、F/N は連続（continuous）である。$\theta \to \theta_0^-$ のとき、分母 $(1 - k\sin\theta)\cos\theta$ は正の値をとりながら 0 に近づき、分子 sk は一定の正の数なので、第 1 項は $+\infty$ に発散する（$\tan\theta$ は有界であるか、やはり $+\infty$ に発散する）。よって $F/N \to +\infty$ である。

したがって F/N は $sk < \tan\alpha$ から始まり、N が 0 になる前に限りなく大きくなる。中間値の定理（intermediate value theorem）により、$F/N = \tan\alpha$ となる最初の角 $\theta_1 < \theta_0$ が存在し、そこで質点は滑り始める。これは N がまだ正である角で起こるので、1 つ目の主張が示された。

この角において、$sk > 0$ かつ $(1 - k\sin\theta_1)\cos\theta_1 > 0$ であるから、

$$\tan\alpha = \frac{F}{N} = \frac{sk}{(1 - k\sin\theta_1)\cos\theta_1} + \tan\theta_1 > \tan\theta_1.$$

α と θ_1 はともに $[0, \frac{\pi}{2})$ に属し、そこで tan は増加関数なので、$\theta_1 < \alpha$ である。すなわち、滑り始めるとき板が水平となす角は α より小さい。これが 2 つ目の主張である。

2 つ目の主張は、見かけほど意外なものではない。固定された板の上に静止している質点は、板の角度が摩擦角（angle of friction）α に達したちょうどそのときに滑り始める。ここでは板が加速しているので、質点を板とともに運ぶのに余分な力（$mgsk$ の項）が必要となり、そのぶん摩擦力が早く限界に達するのである。

検算

- $t = 0$ では板は水平であり、質点の加速度は水平方向の $(-sL\omega^2, 0)$ である。このとき $N = mg$ と $F = msL\omega^2 = mgsk$ がちょうどその加速度を生じるはずであり、実際そうなっている。
- $\omega \to 0$（したがって $k \to 0$）のとき、板は非常にゆっくりと持ち上げられる。このとき $N \to mg\cos\theta$、$F \to mg\sin\theta$ となり、固定された斜面上でのおなじみのつり合いの値になる。滑りは $\theta = \alpha$ で起こり、これは今回の不等式の境界にあたる。
- 数値例として、$s = \frac{1}{2}$、$k = \frac{1}{2}$、$\alpha = \frac{\pi}{4}$（よって $sk = \frac{1}{4} < 1$）とし、$F/N = 1$ を解くと、滑りは $\theta \approx 0.545$ rad、約 31° で起こる。このとき $N \approx 0.63mg > 0$ かつ $\theta < 45°$ である。$sk < \tan\alpha$ を満たす s、k、α を数千通り無作為に選んでコンピュータで確かめたところ、いずれの場合も $N > 0$ のまま α より小さい角で滑りが起こった。

よくある間違い

- θ を B における角ではなく A における角としてしまう。そうすると正弦と余弦が入れ替わり、与えられた式が出てこない。
- 水平方向と鉛直方向に分解し、$\sin\theta$ と $\cos\theta$ だらけの連立方程式（simultaneous equations）を解こうとする。板に沿った方向と垂直な方向に分解すれば、N と F はただちに分離される。
- 小問 (iv) で、θ が $\frac{\pi}{2}$ に近づく場合だけを論じ、$k > 1$ のときは垂直抗力がそれより早く $\sin\theta = 1/k$ で 0 になることを忘れる。

STEP のその先へ

この問題は、運動する座標系における力を扱っている。板から見ると、質点には点 C の加速度の $-m$ 倍に等しい余分な「見かけの力」（fictitious force）がはたらいて感じられ、$mgsk$ の項はまさに最初の時点でのその慣性力（inertial force）である。大学では、この考え方が発展して、遠心力（centrifugal force）やコリオリ力（Coriolis force）を含む、加速・回転する座標系（reference frame）の完全な理論となる。Kleppner と Kolenkow の *An Introduction to Mechanics*（力学入門）は、非慣性系（non-inertial frame）を多くの例題とともに扱っている。

Beyond STEP 解答集：https://beyondstep.keithmcnulty.org/ja/。解答本文は CC0 1.0 である。問題そのものは © Cambridge University Press & Assessment に帰属し、ここには掲載していない。英語版から機械翻訳したものであり、まだ校閲を経ていない。